EXERCICES DE GEOMETRIE – BASES

Exercice n° 1 p. 222

Puisque $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont de même mesure, il en est de même pour les angles $\widehat{BCL}$ et $\widehat{ABN}$. Notons *x* cet angle. Par suite, $\widehat{MNL} = \widehat{ANB} = 180 - (90 + x) = 90 - x$. De même, $\widehat{NLM} = \widehat{BLC} = 180 - (90 + x) = 90 - x$. On en déduit que ces angles sont égaux, donc que MNL est isocèle en M.

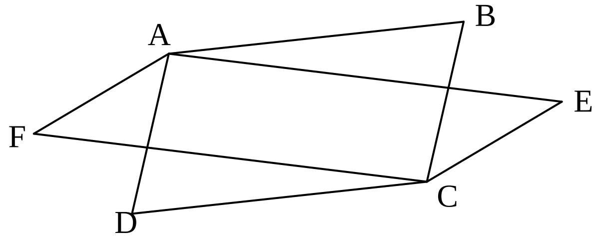
Exercice n° 2 p. 222

$\widehat{AMD} = 180 - 60 = 120°$, donc les angles égaux du triangle AMD isocèle en M mesurent chacun ½ (180 – 120) = ½ 60 = 30°. De plus, $\widehat{MOA} = 180 - (90 + 60) = 30°$, donc $\widehat{AOE} = 90 - 30 = 60°$. Un triangle isocèle en O dont l'angle $\widehat{O}$ mesure 60° est un triangle équilatéral, donc $\widehat{OAE} = 60°$. Enfin, $\widehat{DAE} = \widehat{DAM} + \widehat{MAO} + \widehat{OAE} = 30 + 90 + 60 = 180°$. C'est l'angle plat, donc les points D, A et E sont bien alignés.

Exercice n° 3 p. 222

Soit H le point d'intersection des droites (TP) et (RS). Alors les angles $\widehat{BPT}$ et $\widehat{APH}$ sont égaux car opposés par le sommet. Par conséquent, avec les données de la figure, $\widehat{SPH} = \widehat{SPA} + \widehat{APH} = x + x = 2x$. Mais on a aussi $\widehat{SPH} = 180 - (90 + 26) = 180 - 116 = 64°$. On en déduit que $x = 32°$.

Exercice n° 4 p. 222

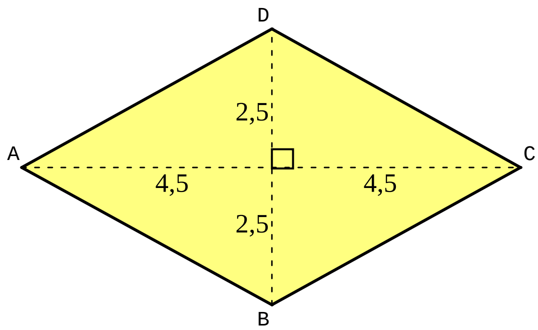


Soit I le milieu de [AC]. ABCD est un parallélogramme, donc ses diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu I. AECD est un parallélogramme, donc ses diagonales [AC] et [EF] se coupent en leur milieu, donc aussi en I. En particulier, les segments [BD] et [EF] se coupent en I, qui est leur milieu commun, le quadrilatère BEDF est donc aussi un parallélogramme.

Exercice n° 5 p. 222

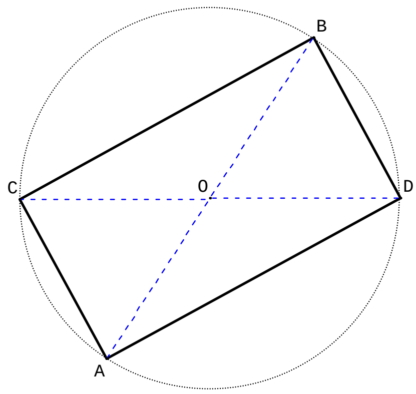
F est l'image de E par la symétrie de centre I, point d'intersection des diagonales [AC] et [BD]. Par suite, I est le milieu de [EF], et comme c'est aussi le milieu de [BD], il est immédiat que le quadrilatère DEBF est un parallélogramme.

Exercice n° 7 p. 223



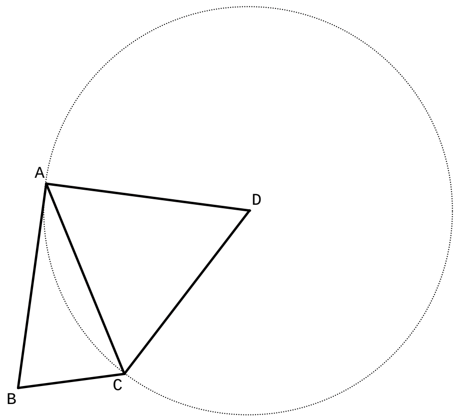
L'aire du losange vaut 4 fois celle d'un petit triangle. Puisque celle d'un petit triangle vaut $\frac{4{,}5 \times 2{,}5}{2} = 5{,}625$ cm². En conséquence, l'aire du losange vaut $4 \times 5{,}625 = 22{,}5$ cm².

Exercice n° 9 p. 223



On constate déjà que les diagonales se coupent en leur milieu et sont de même longueur. De plus, les 4 angles sont droits : en effet, [AB] étant un diamètre du cercle et C un point de ce cercle, $\widehat{ACB}$ est droit, tout comme $\widehat{ADB}$ puisque D est aussi sur le cercle. On peut faire la même chose en disant que [CD] est un diamètre de cercle, et A, B deux points de ce cercle.

Exercice n° 10 p. 223



L'angle $\widehat{BAC}$ vaut 30°, l'angle $\widehat{CAD}$ vaut 60° puisque le triangle CAD est équilatéral. Par conséquent, l'angle $\widehat{BAD}$ vaut 90° et est donc droit. Or le cercle $\mathscr{C}$ de centre D passant par C passe aussi par A puisque ACD est équilatéral implique en particulier que DC = DA. On en déduit que la droite (AB) est perpendiculaire au rayon [AD] du cercle $\mathscr{C}$, c'est la définition de la tangente.

Exercice n° 11 p. 223

a) [OA] et [OB] étant deux rayons du cercle $\mathscr{C}$, on a directement que OA = OB, ce qui rend le triangle OAB isocèle en O. Par suite, on sait déjà que $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$. De même, [O'A] et [O'B'] étant deux rayons du cercle $\mathscr{C}$', on a directement que O'A = O'B', ce qui rend le triangle O'AB' isocèle en O'. On sait donc que $\widehat{O'AB'} = \widehat{O'B'A}$. Or $\widehat{OAB} = \widehat{O'AB'}$ car ce sont deux angles opposés par le sommet. Il s'en suit que $\widehat{OBA} = \widehat{O'B'A}$.

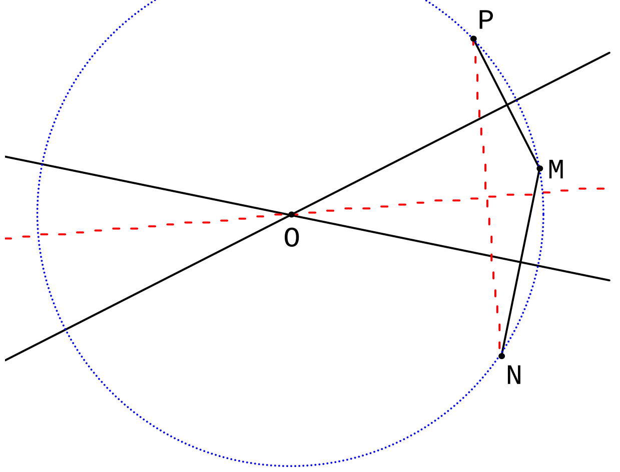
b) De l'égalité précédente, puisque les points O, A et O' sont alignés, on peut affirmer que ces sont deux angles alternes-internes, et donc les droites (OB) et (O'B') sont parallèles.

c) La tangente à $\mathscr{C}$ en B est perpendiculaire à (OB). La tangente à $\mathscr{C}$' en B' est perpendiculaire à (O'B'). Mais les droites (OB) et (O'B') sont parallèles, donc deux droites perpendiculaires à ces droites parallèles sont parallèles entre elles, c'est-à-dire que les tangentes à $\mathscr{C}$ en B et à $\mathscr{C}$' en B' sont parallèles (sinon faire un petit dessin pour s'en convaincre).

Exercice n° 13 p. 223

a) O représente le centre du cercle circonscrit, puisque le centre du cercle circonscrit est par définition de point de concours des trois médiatrices.

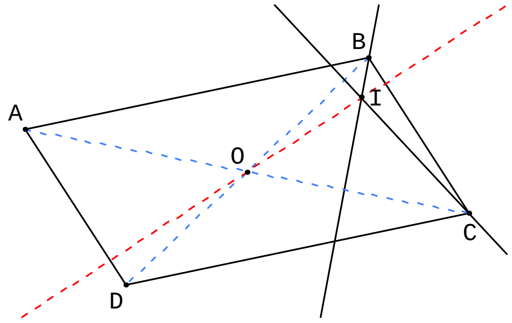
b) D'après la définition, les trois médiatrices se coupent en le centre du cercle circonscrit, donc la médiatrice du segment [PN] est la droite passant par son milieu et par O.



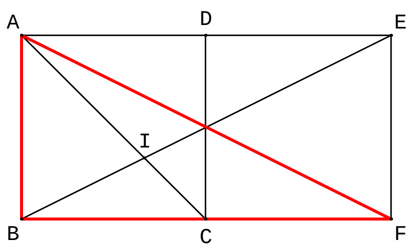
Exercice 14 p. 223

On se place dans le triangle OBC. Par hypothèse, la perpendiculaire à (AC) = (OC) passant par B, soit la hauteur issue de B, et la perpendiculaire à (BD) = (OB) passant par C, soit la hauteur issue de C, se coupent en I. I est donc l'orthocentre du triangle OBC. On en déduit que la troisième hauteur issue de O, donc (OI) est perpendiculaire au dernier côté, à savoir (BC).

Enfin, il suffit de remarquer qu'un parallélogramme admet ses côtés opposés parallèles, donc les droites (BC) et (AD) sont parallèles. Puisque (OI) est perpendiculaire à (BC), cette droite (OI) est aussi perpendiculaire à (AD).



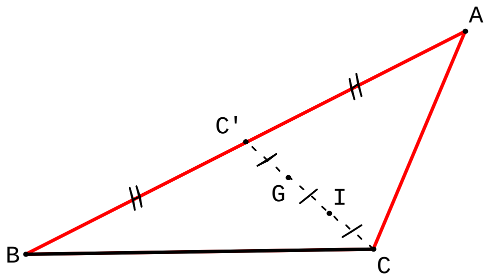
Exercice 15 p. 223



I est le centre de gravité du triangle ABF. En effet, C étant le milieu de [BF] (par construction de la figure donnée dans l'énoncé), (AC) est la médiane issue de A du triangle ABF. De plus, le quadrilatère ABFE étant un rectangle, ses diagonales se coupent en leur milieu, en particulier (BE) coupe le côté [AF] en son milieu, donc (BE) est la médiane issue de B du triangle ABF.

Finalement, puisque I est l'intersection de deux médianes (BE) et (AC), I est le centre de gravité du triangle ABF.

Exercice 16 p. 223



1. On place le point I, milieu de [GC].

2. D'après le cours, si C' désigne le milieu du côté [AB], on sait que le centre de gravité G se trouve sur le segment [CC'] aux deux tiers du sommet C. On place ainsi le point C' tel que $\overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{IG}$ (on aura donc bien que C, G et C' sont alignés dans cet ordre, et CG = $\frac{2}{3}$ CC').

3. D'après le point 2, C' est le milieu de [AB], on place donc le symétrique A de B par rapport à C', et le triangle recherché est ainsi obtenu.

Exercice n° 23 p. 224

On note a l'angle codé par un trait (donc la moitié de l'angle $\widehat{A}$), et b la moitié de l'angle $\widehat{B}$, donc l'angle codé par un trait double. En se plaçant dans le triangle IAB, on sait que

$a + b + 135 = 180$

donc $a + b = 45$

donc $2(a + b) = 90$

donc $\widehat{A} + \widehat{B} = 90$

et donc $\widehat{C} = 180 - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180 - 90 = 90$.

Le triangle ABC est donc bien rectangle en C.

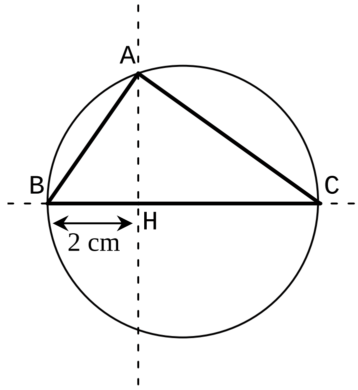
Exercice n° 24 p. 224

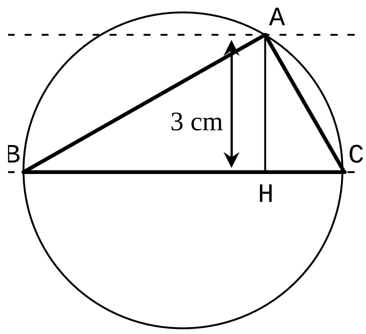
Notons déjà que si ABC doit être un triangle rectangle en A, alors [BC] est un diamètre du cercle circonscrit qui contiendra donc A. Les trois figures associées se trouvent en-dessous des solutions…

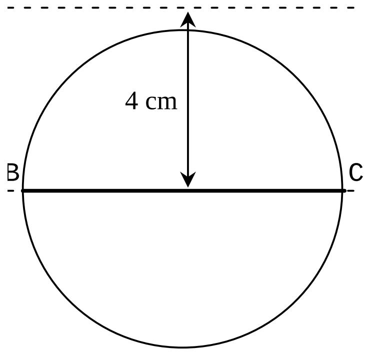
a. Si BC = 6 cm et BH = 2 cm, on peut construire le point A. En effet, ces informations nous donnent la position de H par rapport à B et C, il suffit alors de tracer une perpendiculaire à [BC] passant par H, et de choisir l'un des points d'intersection avec le cercle pour point A.

b. Si AH = 3 cm et BC = 7 cm, on peut aussi construire le point A. Pour cela, il suffit de tracer une parallèle à (BC) distante de 3 cm par rapport à cette dernière, et de choisir l'un des points d'intersection avec le cercle comme point A.

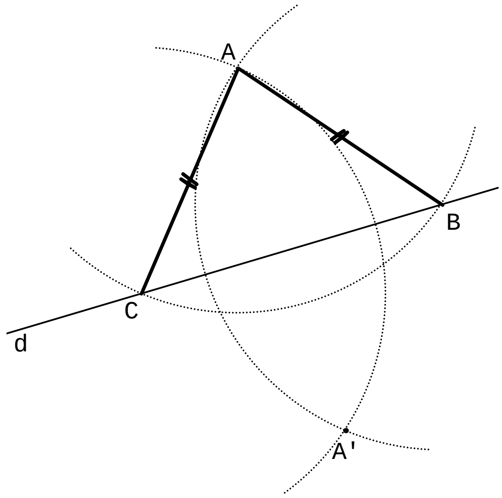
c. Si AH = 4 cm et BC = 7 cm, on ne peut pas construire le point A. En effet, la méthode précédente ne donne en aucun cas de point d'intersection entre la parallèle et le cercle. Cela peut s'interpréter de la manière suivante : puisque BC = 7 cm, le rayon du cercle circonscrit est de 3,5 cm. AH > 3,5 cm, donc on ne peut pas trouver de tel point A.







Exercice n° 37 p. 225

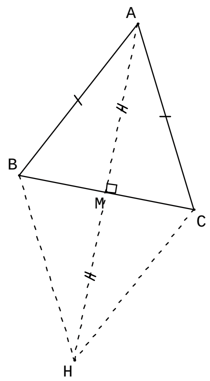


1. On commence par tracer le cercle de centre A, de rayon assez grand pour pouvoir couper *d* en deux points distincts que l'on note B et C.
2. On trace ensuite le cercle de centre C et de rayon AC.
3. On continue avec le cercle de centre B et de rayon AB = AC (à noter que les trois cercles ont donc le même rayon).
4. La deuxième intersection de ces deux derniers cercles est le point recherché A' (la première étant A).

Un peu de théorie : B et C sont sur la droite *d*, donc les deux derniers cercles seront l'image d'eux-mêmes par la symétrie. Or, on a vu dans le cours que l'image d'une intersection est l'intersection des images, et puisque A est un point d'intersection des deux cercles, A' sera l'autre point.

Exercice n° 38 p. 225

Première solution

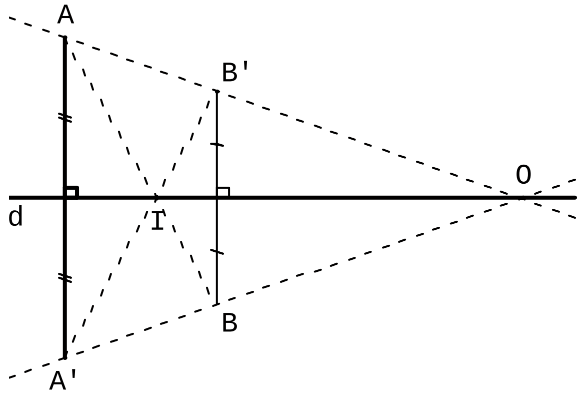


ABC est un triangle isocèle en A, donc la hauteur issue de A en est aussi la médiatrice. Notons M le pied de cette hauteur, de sorte que MB = MC et (AM) ⊥ (BC). H étant le symétrique de A par rapport à (BC), on a que H ∈ (AM) et AM = MH. Les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu, donc ABHC est un losange.

Seconde solution

On considère la symétrie *s* d'axe (BC). Par cette symétrie, B a pour image B et C a pour image C (puisque ces deux points sont sur la droite de symétrie), et A a pour image H (d'après l'énoncé). Par conséquent, [AB] a pour image [HB] et [AC] a pour image [HC], et comme les longueurs sont conservées, on a AB = HB et AC = HC. Or AB = AC car ABC est isocèle en A, donc AB = AC = HB = HC. Les quatre côtés ont même longueur, donc ABHC est un losange.

Exercice 39 p. 225

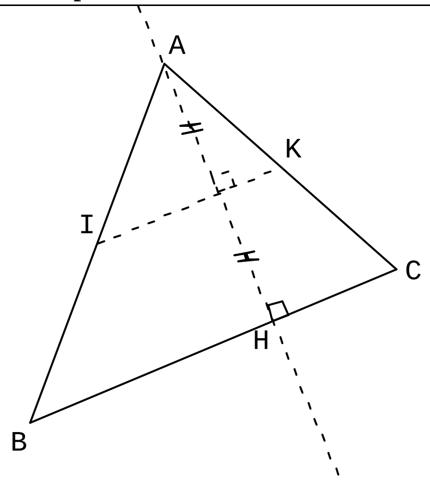


On commence par tracer la droite (A'B) qui coupe *d* en un point nommé O. **Conséquence** : O étant sur *d*, le symétrique de [A'O] par rapport à *d* est [AO], et puisque B ∈ [A'O], on sait déjà que B' ∈ [AO].

On trace ensuite la droite (AB) qui coupe *d* en un point noté I. **Conséquence** : puisque I est sur *d*, le symétrique de (AI) = (AB) par rapport à *d* est (A'I), et puisque B ∈ (AI), on sait aussi que B' ∈ (A'I).

D'après les deux conséquences ci-dessus, B' est l'intersection des droites (AO) et (A'I), il suffit alors de les tracer pour déterminer la position du point B'.

Exercice n° 40 p. 225



Notons M l'intersection des droites (IK) et (AH). Il faut démontrer deux choses :

- que (AH) ⊥ (IK) ;
- que AM = MH.

Premier point

Grâce au théorème des milieux (toutes les hypothèses sont vérifiées), on sait que (IK) // (BC). Or (AH) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC, donc (AH) ⊥ (BC), et donc (AH) ⊥ (IK).

Second point

Puisque (IK) // (BC), on peut appliquer la réciproque du théorème des milieux dans le triangle AHB pour pouvoir affirmer que la droite (IK) coupe [AH] en son milieu M. M est donc le milieu de [AH], donc AM = MH.

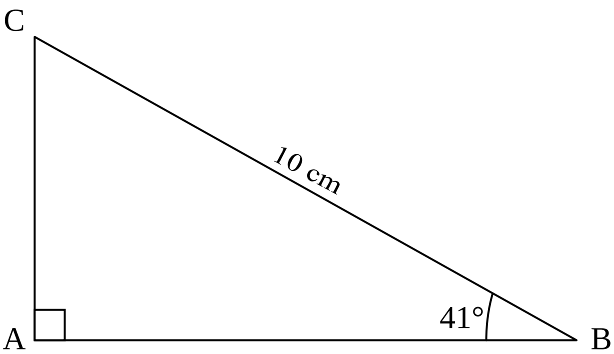
Exercice n° 41 p. 226

On considère la symétrie s de centre O. L'image de A (respectivement B) est C (respectivement D), donc l'image de (AB) est (CD). Or d passe par O, donc son image par s est elle-même, c'est-à-dire d. Puisque l'image d'une intersection est l'intersection des images, on a que l'image de M, intersection de (AB) et d, est N, intersection de (CD) et d.

Enfin, l'image de [AM] sera sont [CN] puisque A admet pour image C et M a pour image N. On en déduit que AM = CN.

Exercice n° 50 p. 226

a) Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BNC}$ interceptent le même arc



$\overset{\frown}{BC}$, ils ont donc même mesure, donc $\widehat{BNC} = 60°$. De même, les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$, donc $\widehat{ANB} = \widehat{ACB} = 60°$. Enfin, pour les mêmes raisons, $\widehat{AMC} = \widehat{ABC} = 60°$.

b) $\widehat{ANC} = \widehat{ANB} + \widehat{BNC} = 60 + 60 = 120°$ et $\widehat{ANC} + \widehat{AMC} = 120 + 60 = 180°$, ils sont donc bien supplémentaires. Ils n'interceptent par contre pas le même arc, puisque M et N sont de part et d'autre de la droite (AC).

Conclusion du b : Ce n'est évidemment pas une démonstration, mais on pourrait conjecturer que si M et N sont deux points qui n'interceptent pas le même arc $\overset{\frown}{AC}$, alors $\widehat{AMC} + \widehat{ANC} = 180°$ c'est-à-dire $\widehat{AMC}$ et $\widehat{ANC}$ sont supplémentaires).

Exercice n° 52 p. 227

On commence par déterminer AB :

$\frac{AB}{AC} = \cos(41°) \Leftrightarrow AB \approx 10 \times 0{,}7547 \approx 7{,}55$ cm.

On détermine ensuite AC :

$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} \approx \sqrt{100 - 7{,}55^2} \approx 6{,}56$ cm.

Le périmètre vaut donc $\mathscr{P} = 7{,}55 + 6{,}56 + 10 = 24{,}11$ cm, et l'aire vaut $\mathscr{A} = \frac{7{,}55 \times 6{,}56}{2} = 24{,}764 \approx 24{,}76$ cm^2.

Exercices d'approfondissement

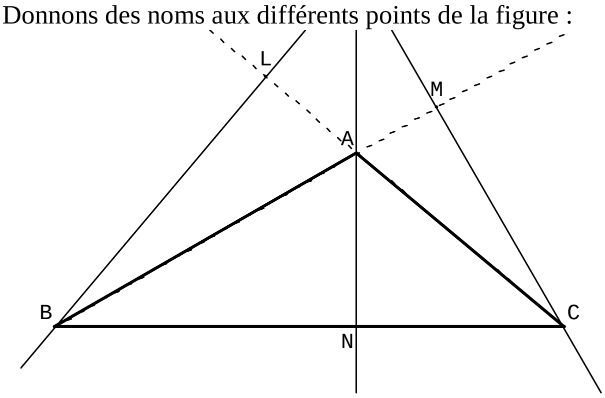
Exercice n° 80 p. 229

a) Par la translation de vecteur $\overrightarrow{EB}$, E a pour image B, D a pour image C, et donc (EI) a pour image la droite perpendiculaire à (AC) passant par B, et (DI) a pour image la perpendiculaire à (AB) passant par C.
L'image de I, intersection des droites (EI) et (DI), est donc l'orthocentre H du triangle ABC.

b) Remarquons que (EB) ⊥ (BC), donc (IH) ⊥ (BC) (en effet, le vecteur de la translation est toujours perpendiculaire à (BC)), et (AH) ⊥ (BC) car (AH) est la hauteur issue de A, donc les points A, H et I sont alignés.

Exercice n° 81 p. 229

Donnons des noms aux différents points de la figure :



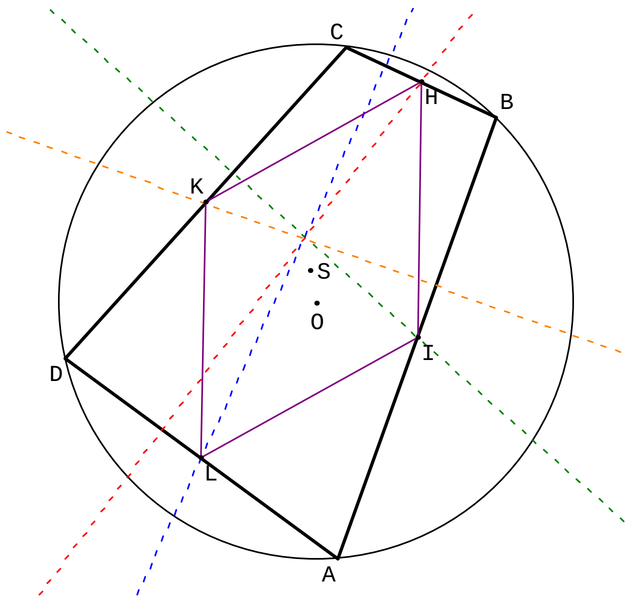
On a rajouté trois points sur la figure.

On va déterminer l'angle $\widehat{BLC}$: On sait que $\widehat{BAN} = 60°$ et $\widehat{ANB} = 90°$, donc $\widehat{NBA} = 30°$, ce qui implique que $\widehat{NBL} = 30 + 20 = 50°$. Or $\widehat{NCA} = 180 - (\widehat{CNA} + \widehat{NAC}) = 180 - 90 - 50 = 40°$, d'où $\widehat{BLC} = 180 - (\widehat{LBC} + \widehat{BCL}) = 180 - (\widehat{LBN} + \widehat{BNA}) = 180 - 50 - 40 = 90°$.

On va déterminer l'angle $\widehat{BMC}$: On vient de déterminer que $\widehat{BCL} = \widehat{NCA} = 40°$, donc $\widehat{BCM} = 40 + 20 = 60°$. Or $\widehat{CBM} = \widehat{NBA} = 30°$, donc $\widehat{BMC} = 180 - (\widehat{BCM} - \widehat{CBM}) = 180 - (60 + 30) = 90°$.

Par l'énoncé, (NA) ⊥ (BC). On vient aussi de montrer que (LB) ⊥ (AC) et (MC) ⊥ (AB). Les droites (NA), (LB) et (MC), c'est-à-dire d_1, d_2 et d_3 sont donc concourantes puisque ce sont les trois hauteurs du triangle ABC.

Exercice n° 82 p. 229



a) On utilise le théorème des milieux à plusieurs reprises :
- Dans le triangle ACD, (KL) coupe respectivement [CD] et [AD] en leurs milieux K et L, donc (KL) // (AC) ;
- Dans le triangle ACB, (HI) coupe respectivement [CB] et [AB] en leurs milieux H et I, donc (HI) // (AC) ;
- Dans le triangle BDC, (HK) coupe respectivement [CB] et [CD] en leurs milieux H et K, donc (HK) // (BD) ;
- Dans le triangle BDA, (LI) coupe respectivement [AD] et [BD] en leurs milieux L et I, donc (LI) // (BD).

Des deux premiers points, on peut déduire que (KL) // (HI), et des deux derniers, (HK) // (LI). Au final, les côtés opposés sont deux à deux parallèles, c'est une condition suffisante pour affirmer que le quadrilatère IHKL est un parallélogramme.

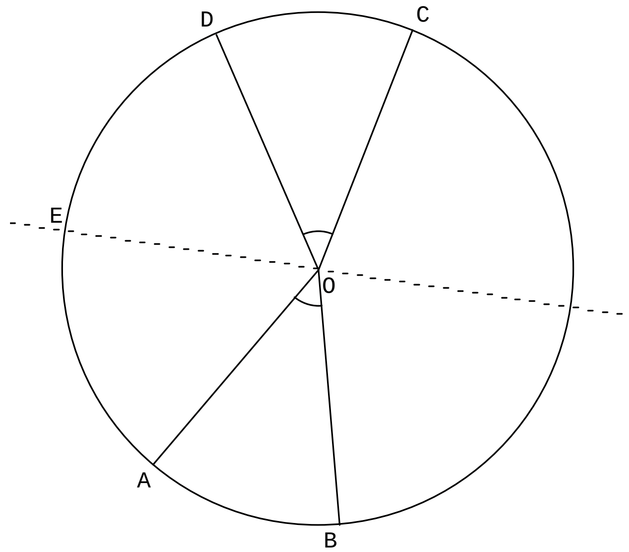
b) I est le milieu de [AB], et la médiatrice de [AB] passe nécessairement par O puisque A et B sont sur le même cercle de centre O. D'où (OI) est cette médiatrice, ce qui implique que (OI) ⊥ (AB). L'image (O'I') de (OI) par la symétrie de centre S sera donc perpendiculaire à (A'B'). Mais (A'B') // (AB) car une symétrie centrale transforme une droite en droite parallèle, donc (O'I') ⊥ (AB). Enfin, l'image de I par cette symétrie est K, puisque S est le centre du parallélogramme IHKL, donc (O'I') est la droite perpendiculaire à (AB) passant par K, c'est-à-dire d_3.

On montre de la même manière que l'image de (OH) est la perpendiculaire à (BC) passant par L (c'est-à-dire d_4), que l'image de (OK) est la droite perpendiculaire à (CD) passant par I (c'est-à-dire d_1), et que l'image de (OL) est la perpendiculaire à (AD) passant par H (c'est-à-dire d_2).

Les droites (OI), (OH), (OK) et (OL) sont concourantes en O, donc les droites images d_1, d_2, d_3 et d_4 seront aussi concourantes en un point, qui n'est autre que le symétrique du point O par rapport à S (en effet, on rappelle que l'image d'une intersection est l'intersection des images).

Exercice n° 83 p. 229

Soient *d* la bissectrice de l'angle $\widehat{AOD}$ et E le point d'intersection de *d* avec le cercle se trouvant sur le petit arc $\overset{\frown}{AD}$. Faisons une figure pour récapituler ces informations :



Les angles $\widehat{EOD}$ et $\widehat{EOA}$ sont égaux, et OD = OA, donc D est l'image de A par la symétrie d'axe (OE). Puisqu'on a $\widehat{EOD} = \widehat{EOA}$ et $\widehat{DOC} = \widehat{AOB}$, on a aussi $\widehat{EOC} = \widehat{EOB}$, et comme OC = OB, on a aussi que C est l'image de B par la symétrie d'axe (OE). Par définition de la symétrie axiale, les droites (AD) et (BC) sont donc toutes les deux perpendiculaires à (OE), donc parallèles entre elles.

Exercice n° 84 p. 229

a) **Analyse** : Les quatre points sont cocycliques. En effet, les triangles OPA et OQA sont tous deux rectangles (respectivement en P et Q), et admettent [OA] comme hypoténuse commune. D'après un théorème du cours, P appartient au cercle de diamètre [OA], et Q vérifie la même propriété. Donc les quatre points O, P, Q et A sont situés sur le même cercle de diamètre [OA].

b) **Synthèse** : On trace d'abord la droite (OA). On construit ensuite au compas la médiatrice du segment [OA], et on appelle I le point d'intersection entre cette médiatrice et (OA). On trace enfin le cercle de centre I passant par O, en notant P et Q les deux points d'intersection avec le cercle $\mathscr{C}$.
Par le théorème réciproque de celui utilisé à la question *a*, on sait que le triangle OPA est rectangle car P se trouve sur le cercle de diamètre [OA]. Or [OP] est un rayon de $\mathscr{C}$, donc (PA) est bien la tangente

en P au cercle $\mathscr{C}$. On effectue le même raisonnement pour justifier que (QA) est bien la tangente en Q au cercle $\mathscr{C}$.

Exercice n° 85 p. 229

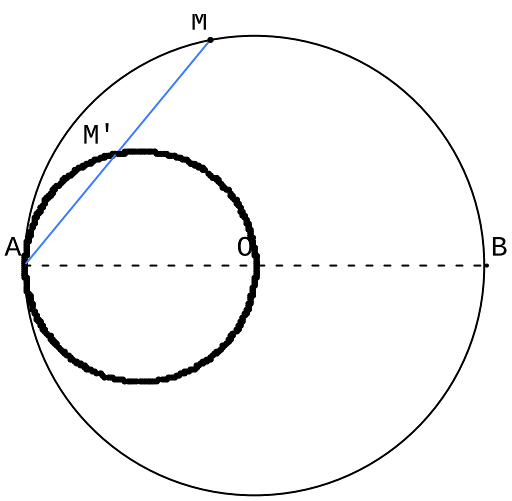
Analyse : On suppose le problème résolu (pour cela, on fait une figure à main levée approximative, mais quand même assez précise pour pouvoir émettre une conjecture). Puisque I est le milieu de [MM'], la parallèle à (BC) passant par I coupe le troisième côté du triangle OMM' (donc OM) en son milieu, sachant que O est le point d'intersection de *d* et *d'*.

Synthèse : On trace la parallèle à *d'* passant par I. Celle-ci coupe la droite *d* en un point noté I' (en effet, les droites *d* et *d'* sont sécantes). Soit M le symétrique de O par rapport par rapport à I', et M' le symétrique de M par rapport à I. On va montrer que I est le milieu de [MM']. Pour cela, on se place dans le triangle OMM'. I' est le milieu de [OM] et (II') est parallèle à *d'* = (OM'), donc (par le théorème des milieux), (II') coupe le dernier côté [MM'] en son milieu. Puisque I $\in$ (MM'), c'est lui le milieu !!

Exercice n° 86 p. 230

Les droites *d'* et Δ se coupent en un point noté O. On trace la droite *d''*, symétrique de *d'* par rapport à Δ. Si M est un point quelconque de *d'*, son image M' par cette symétrie vérifiera la propriété demandée, à savoir que Δ soit la médiatrice de [MM'] (caractérisation de la symétrie axiale). Or M' doit aussi appartenir à la droite *d*, on en déduit que M' est le point d'intersection entre *d* et *d''*. On construit ensuite M en tant que symétrique de M' par rapport à Δ.

Exercice n° 87 p. 230



Soit M un point quelconque sur le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB]. Le triangle AMB est donc rectangle en M. Puisque O est le milieu de [AB] et M' le milieu de [AM], la réciproque du théorème des milieux nous assure que (OM') // (MB), et donc (OM') $\perp$ (AM') car (BM) $\perp$ (AM'). Le triangle AM'O est donc rectangle en M', et puisque les points A et O sont fixes, le théorème du cercle circonscrit à un triangle rectangle nous permet d'affirmer que lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$, M' décrit aussi un cercle, celui de diamètre [AO].

Remarque instructive : Cette transformation s'appelle une homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$ parce que A, M, M' sont alignés, et AM' = $\frac{1}{2}$AM (autrement dit, la distance entre le centre A et l'image M' d'un point M mesure la moitié de la longueur du centre au point M).