Ordre, intervalles et valeur absolue

I – COMPARAISON DE NOMBRES

1. Quelques rappels de base

Le but de ce paragraphe est de rappeler quelques notions de base qui ont été abordées au collège.

Comparaison et addition : Soient a, b et c trois nombres réels.
(i) Si $a \leqslant b$, alors $a + c \leqslant b + c$;
(ii) Si $a \geqslant b$, alors $a + c \geqslant b + c$.

Comparaison et multiplication : Soient a, b et c trois nombres réels.
(i) *Conservation du sens de l'inégalité* :
  a) Si $c \geqslant 0$ et $a \geqslant b$, alors $ac \geqslant bc$;
  b) Si $c \geqslant 0$ et $a \leqslant b$, alors $ac \leqslant bc$.
(ii) *Changement du sens de l'inégalité* :
  a) Si $c \leqslant 0$ et $a \geqslant b$, alors $ac \leqslant bc$;
  b) Si $c \leqslant 0$ et $a \leqslant b$, alors $ac \geqslant bc$.

Comparaison de nombres décimaux :
(i) On regarde leur signe (on peut peut-être conclure si l'un est négatif et l'autre positif) ;
(ii) On regarde les parties entières (on peut peut-être conclure) ;
(iii) On compare les parties décimales (on peut conclure)

Exemples :
1) On a $2{,}08 < 20{,}8$ (parties entières) ;
2) On a $2{,}155 < 2{,}9$ (parties décimales).

Règle 1 (nombres rationnels en écriture fractionnaire) :
Soient a, b et c trois nombres décimaux positifs.
(i) Les nombres $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$ ($c \neq 0$) sont rangés dans le même ordre que a et b.
(ii) Les nombres $\frac{c}{a}$ et $\frac{c}{b}$ ($a \neq 0$ et $b \neq 0$) sont rangés dans l'ordre contraire de a et b.

Exemple : On a $\frac{5}{2} < \frac{13}{2}$ car $5 < 13$, et on a aussi $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ car $4 > 3$.

Règle 2 (comparaison à un nombre intermédiaire) :
Soient a, b et c trois nombres réels. Si $a < b$ et $b < c$, alors on a $a < c$.

Exemple : On a $\frac{2}{3} < \frac{5}{4}$ en comparant ces deux nombres à 1.

Règle 3 (signe de la différence) :
Soient a et b deux nombres réels.
(i) Si $a - b > 0$, alors $a > b$.
(ii) Si $a - b < 0$, alors $a < b$.

Règle 4 (carré, racine carrée et inverse) :
(i) Les carrés de deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que ces nombres.
(ii) Les racines carrées de deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que ces nombres.
(iii) Les inverses de deux nombres positifs sont rangés dans l'ordre inverse de ces deux nombres.

Exemples : * $3 < 5$, donc $9 < 25$;
* $2 < \pi$, donc $\sqrt{2} < \sqrt{\pi}$;
* $2 < \pi$, donc $\frac{1}{\pi} < \frac{1}{2}$.

II – INTERVALLES DE NOMBRES REELS

Définition : Soient a et b deux nombres réels tels que a < b. L'ensemble des nombres réels x tels que a $\leqslant$ x $\leqslant$ b est appelé <u>intervalle fermé</u> de $\mathbb{R}$, et est noté [a ; b]. a et b sont alors appelés les <u>bornes</u> de l'intervalle, et b – a est son <u>amplitude</u> (ou sa <u>longueur</u>).

Il existe d'autres types d'intervalles de $\mathbb{R}$. On résume ceci à l'aide du tableau suivant :

Intervalles de $\mathbb{R}$	**Ensemble des réels x tels que…**
$[a ; b]$	$a \leqslant x \leqslant b$
$[a ; b[$	$a \leqslant x < b$
$]a ; b]$	$a < x \leqslant b$
$]a ; b[$	$a < x < b$
$[a ; +\infty[$	$a \leqslant x$
$]a ; +\infty[$	$a < x$
$]-\infty ; b]$	$x \leqslant b$
$]-\infty ; b[$	$x < b$

* Les intervalles $[a ; b[$ et $]a ; b]$ sont appelés <u>intervalles semi-ouverts</u> ;
* L'intervalle $]a ; b[$ est appelé <u>intervalle ouvert</u> ;
* $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des nombres : ce sont des <u>symboles</u>. Du côté de ces deux sumboles, qui se lisent « plus l'infini » et « moins l'infini », le crochet est toujours ouvert ;
* L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels se note donc également $]-\infty ; +\infty[$.

III – VALEUR ABSOLUE D'UN NOMBRE REEL

Ce paragraphe a pour but d'introduire la notion de valeur absolue d'un nombre réel. Cette notion sera reprise dans un chapitre ultérieur avec l'étude des fonctions de référence.

Définition : Soit x un nombre réel quelconque. Sur une droite graduée d'origine O, on désigne par M le point de cette droite qui a pour abscisse le nombre x. La <u>valeur absolue de x</u>, notée $|x|$, est égale à la distance OM.

<u>*Remarque*</u> : D'après cette définition, on a directement que :

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}}$$

Ainsi, la valeur absolue d'un nombre réel est toujours positive, et de plus, on a également que $|x| = |-x|$ pour tous les nombres réels x.

Donnons également trois autres propriétés importantes de la valeur absolue :

Propriétés : Soient x et y deux nombres réels.

1) ***On a $|x \times y| = |x| \times |y|$ (on dit que la valeur absolue est multiplicative) ;***
2) ***On a $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, pour $y \neq 0$;***
3) ***On a l'inégalité $|x + y| \leqslant |x| + |y|$. Cette inégalité est connue sous le nom <u>d'inégalité triangulaire</u> grâce à son interprétation géométrique.***

⚠ : L'inégalité triangulaire est une inégalité, pas une égalité ! Prenez donc $x = -1$ et $y = 2$ pour vous en convaincre…

La notion de valeur absolue nous permet de définit la notion (bien intuitive d'ailleurs) de distance entre deux nombres réels.

Définition (distance entre deux réels) : La distance entre deux réels a et b est égale à $|b - a|$.

Remarque : D'après la remarque précédente, nous avons $|b - a| = |a - b|$. Ceci nous rassure car cela veut dire que la distance de a à b est égale à la distance de b à a !!!

Nous allons maintenant terminer ce chapitre en donnant le résultat le plus important du chapitre :

Théorème : Soient a et x deux nombres réels, et r un troisième nombre réel positif. Les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) La distance de x à a est inférieure ou égale à r ;
(ii) $|x - a| \leqslant r$;
(iii) $x \in [a - r \,;\, a + r]$;
(iv) $a - r \leqslant x \leqslant a + r$;
(v) a est une valeur approchée de x à la précision r.

Bien sûr, ce théorème peut être modifié en considérant que la distance de x à a est strictement inférieure à r. Il faut alors faire les modifications appropriées.

Exemples :
1) $|x - 2| \leqslant 1$ signifie que $x \in [1 \,;\, 3]$ et donc que $1 \leqslant x \leqslant 3$.
2) $|x - 2| < 1$ signifie que $x \in \,]1 \,;\, 3[$ et donc que $1 < x < 3$.