CORRIGÉ ~ CORRIGÉ ~ CORRIGÉ ~ CORRIGÉ ~ CORRIGÉ ~ CORRIGÉ ~ CORRIGÉ

CONTRÔLE N° 3

Note : 40/40

Jeudi 29 novembre 2011 – calculatrice autorisée (durée : 2h)

TOUS LES EXERCICES SONT À FAIRE SUR LE SUJET !!!

Ce sujet comporte 4 pages. Avant de commencer, vérifier que vous avez bien les quatre…

Exercice n° 1 - questions de cours (/3 points)

1. Un vecteur est un objet mathématique caractérisé par trois éléments :

- sa **direction**
- son **sens**
- sa **longueur**

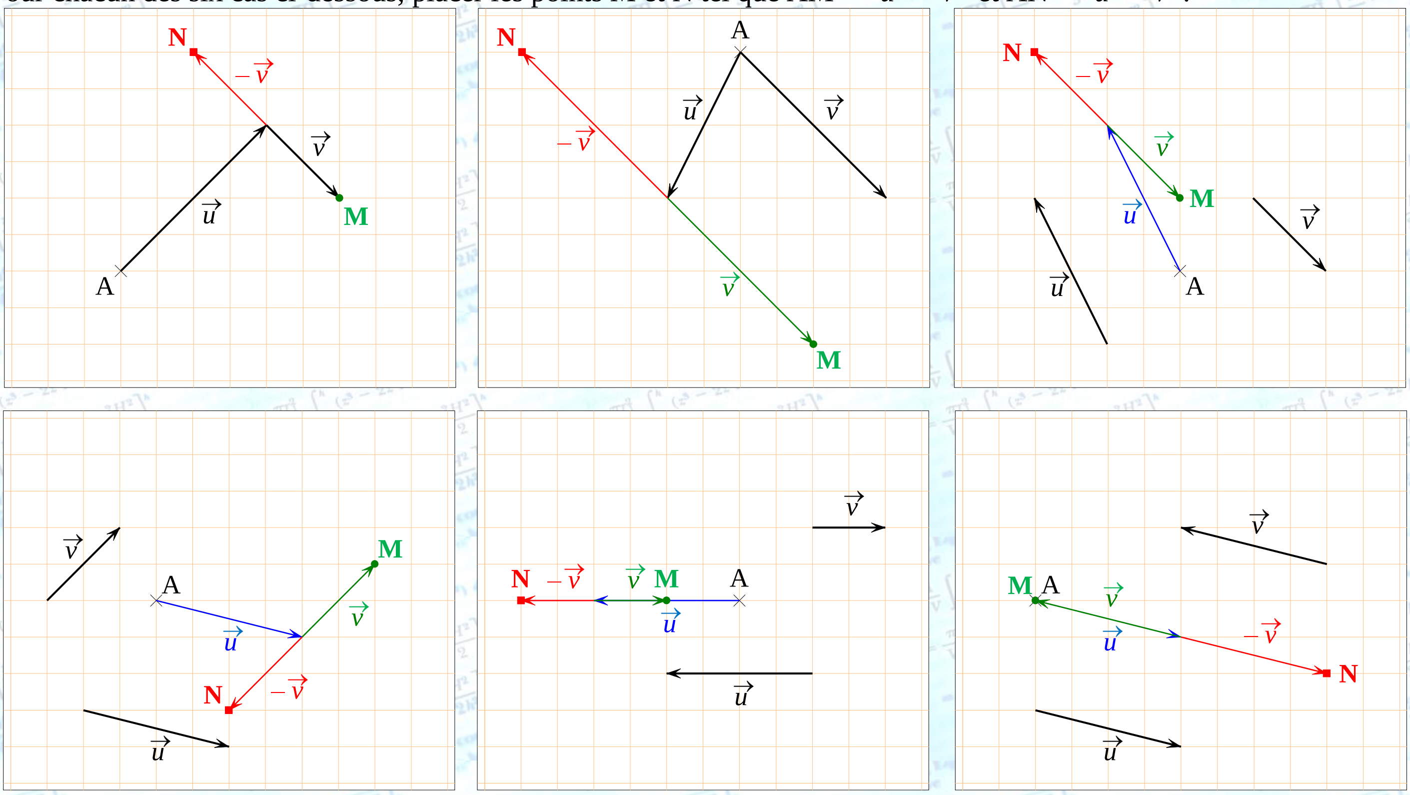
2. Compléter : « Le quadrilatère **ABDC** est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ».

3. Soient A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) deux points. Donner la formule permettant de calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans un repère orthonormé :

$$\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

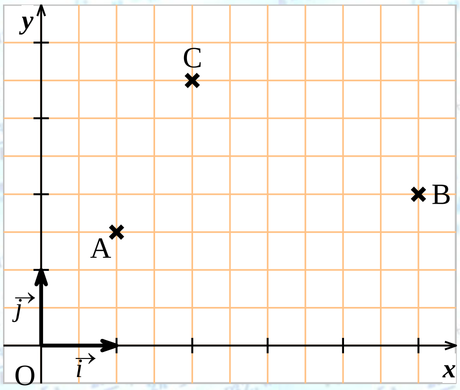
Exercice n° 2 (/12 points)

Pour chacun des six cas ci-dessous, placer les points M et N tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{AN} = \vec{u} - \vec{v}$.



Exercice n° 3 (/8 points)

Voici une figure (ci-contre), dans laquelle trois points A, B et C ont été placés dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.



1. Compléter les coordonnées des vecteurs suivants :

$\overrightarrow{AB} : (x_B - x_A ; y_B - y_A) = (\mathbf{5 - 1 ; 2 - 1{,}5}) = (\mathbf{4 ; 0{,}5})$

$\overrightarrow{AC} : (x_C - x_A ; y_C - y_A) = (\mathbf{2 - 1 ; 3{,}5 - 1{,}5}) = (\mathbf{1 ; 2})$

$\overrightarrow{BC} : (x_C - x_B ; y_C - y_B) = (\mathbf{2 - 5 ; 3{,}5 - 2}) = (\mathbf{-3 ; 1{,}5})$

2. Calculer la norme de chacun de ces vecteurs :

$\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{4^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{16 + 0{,}25} = \sqrt{16{,}25}$

$\| \overrightarrow{AC} \| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

$\| \overrightarrow{BC} \| = \sqrt{(-3)^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{9 + 2{,}25} = \sqrt{11{,}25}$

3. Le triangle ABC est-il rectangle ? Justifier la réponse dans le cadre ci-dessous.

Le plus grand côté du triangle ABC est AB, donc l'égalité de Pythagore à tester est : $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

D'une part, on a : $AB^2 = \sqrt{16{,}25}^2 = 16{,}25$

D'autre part, on a : $AC^2 + BC^2 = \sqrt{5}^2 + \sqrt{11{,}25}^2 = 5 + 11{,}25 = 16{,}25$

Les résultats sont égaux, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C.

Exercice n° 4 (/5,5 points, dont 0,5 de bonus)

On considère un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel les points suivants sont donnés :

A(3 ; 2) ; B(– 1 ; 4) ; C(– 4 ; 0) ; D(0 ; – 2).

1. **Sans tracer le repère ni faire aucun dessin :**
   a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

   $\overrightarrow{AB} : (x_B - x_A ; y_B - y_A) = (-1 - 3 ; 4 - 2) = (-4 ; 2)$

   $\overrightarrow{DC} : (x_C - x_D ; y_C - y_D) = (-4 - 0 ; 0 - (-2)) = (-4 ; 2)$

   b) Que peut-on dire de ces deux vecteurs ? Justifier la réponse.

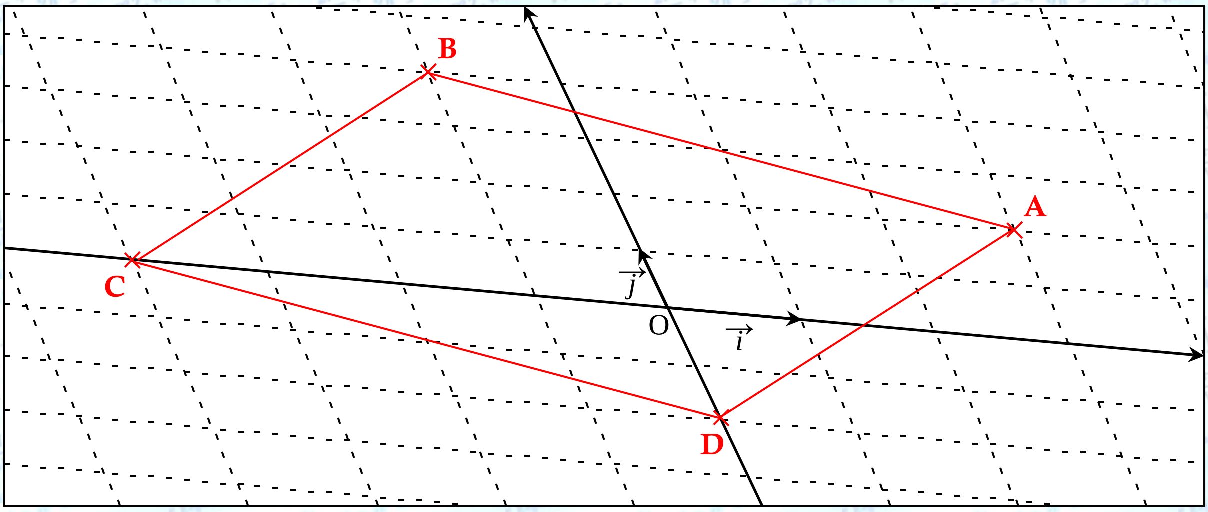
   Ils sont égaux car ils ont les mêmes coordonnées. C'est en effet une propriété du cours :

   $$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x_{\vec{u}} = x_{\vec{v}} \text{ et } y_{\vec{u}} = y_{\vec{v}} .$$

   c) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

   ABCD est un parallélogramme, car « le quadrilatère ABDC est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ » (propriété du cours rappelée dans l'exercice 1, question 2).

2. Construire dans le repère ci-dessous les quatre points ci-dessus afin de vérifier le résultat de la question 1.c) :



Question bonus : Quelle est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$? → $\|\overrightarrow{AB}\|$ = **8,03 cm environ**

ATTENTION : La formule (exercice 1) ne fonctionnera pas car le repère n'est pas orthonormé !

Exercice n° 5 (/6 points)

Les vecteurs *u* et *v* sont-ils dans chacun des quatre cas colinéaires ? Justifier la réponse par un calcul.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix}$ ☑ OUI ☐ NON

   Calcul : **– 1 × (– 8) – 2 × 4 = 8 – 8 = 0**

2. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix}$ ☐ OUI ☑ NON

   Calcul : **3 × 4 – 2 × 9 = 12 – 18 = – 6 ≠ 0**

3. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4{,}2\\6{,}3\end{pmatrix}$ ☑ OUI ☐ NON

   Calcul : **2 × 6,3 – 3 × 4,2 = 12,6 – 12,6 = 0**

4. $\vec{u}\begin{pmatrix}0{,}7\\-2{,}1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2{,}8\\8{,}4\end{pmatrix}$ ☑ OUI ☐ NON

   Calcul : **0,7 × 8,4 – (– 2,1) × (– 2,8)**
   = 5,88 – 5,88 = 0

Exercice n° 6 (/6 points)

CIAO est un carré de 5 cm de côté. On construit les points T et M tels que les triangles TOA et MAI soient équilatéraux, comme on peut le voir sur la figure en fin d'exercice. Tout au long de l'exercice, on pourra s'aider de la figure en fin d'énoncé (figure tracé sur du papier à petits carreaux)… avec précautions !

1. Sur la figure ci-dessous, construire :
   - le point T', pied de la hauteur issue de T dans le triangle TOA,
   - puis le point M', pied de la hauteur issue de M dans le triangle MAI.

2. Calculer la longueur exacte TT' (aussi égale à MM') :

Par construction, le triangle OT'T est rectangle en T'. De plus, dans un triangle équilatéral, une hauteur est aussi une médiatrice, donc OT' = OA ÷ 2 = 2,5 cm. D'après le théorème de Pythagore, on a donc :

$$TT' = \sqrt{OT^2 - OT'^2} = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = \sqrt{25 - 6{,}25} = \sqrt{18{,}75} \left(= \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{\sqrt{3 \times 25}}{\sqrt{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \right).$$

N'oublions pas que TT' = MM'.

3. En déduire les coordonnées exactes des points T et M.

On en déduit, en ajoutant éventuellement le bon repère sur la figure, que :

$$\mathbf{T\left(2{,}5\ ;\ \frac{5\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{et} \quad M\left(5+\frac{5\sqrt{3}}{2}\ ;\ 2{,}5\right).}$$

4. Calculer alors les coordonnées exactes des vecteurs $\overrightarrow{CT}$ et $\overrightarrow{CM}$.

$$\overrightarrow{CT} = (x_T - x_C\ ;\ y_T - y_C) = \left(2{,}5 - 0\ ;\ \frac{5\sqrt{3}}{2} - 5\right) = \left(2{,}5\ ;\ \frac{5\sqrt{3}}{2} - 5\right).$$

$$\overrightarrow{CM} = (x_M - x_C\ ;\ y_M - y_C) = \left(5 + \frac{5\sqrt{3}}{2} - 0\ ;\ 2{,}5 - 5\right) = \left(5 + \frac{5\sqrt{3}}{2}\ ;\ -2{,}5\right)$$

5. Ces deux vecteurs sont-ils colinéaires ? Justifier la réponse.

On applique le critère de colinéarité :

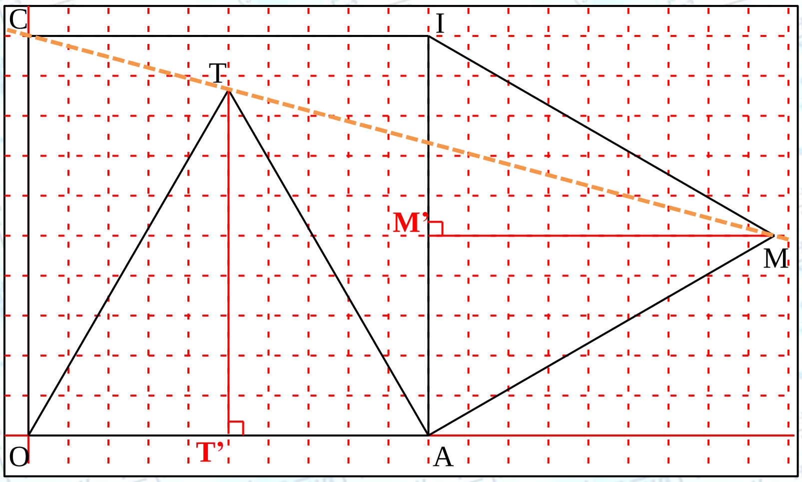
$$2{,}5 \times (-2{,}5) - \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} + 5\right)\left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - 5\right) = -6{,}25 - \left[\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 5^2\right] = -6{,}25 - \left(\frac{25 \times 3}{4} - 25\right)$$

$$= -6{,}25 - (18{,}75 - 25) = -6{,}25 - (-6{,}25) = -6{,}25 + 6{,}25 = 0.$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{CT}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont bien colinéaires.

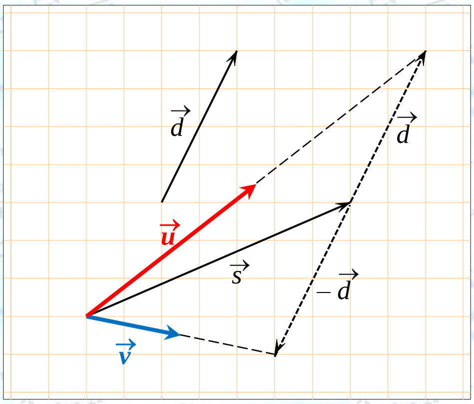
6. Qu'en déduit-on à propos des points C, T et M ? Mettre en évidence cette propriété sur le dessin.

Une propriété dit que « A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ ». On en déduit donc que les points C, T et M sont alignés !



Exercice bonus (/1 point, éventuellement)

Retrouver les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$:



Remarquons que $\vec{s} + \vec{d} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{u} - \vec{v} = 2\vec{u}$

et $\vec{s} - \vec{d} = \vec{u} + \vec{v} - (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} + \vec{v} - \vec{u} + \vec{v} = 2\vec{v}$

On en déduit donc que :

$$\vec{u} = \frac{1}{2}\left(\vec{s} + \vec{d}\right) \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\vec{s} - \vec{d}\right).$$