Lycée Adrien Zeller
4, place du Château
67330 BOUXWILLER

Jeudi 16 février 2012

NOM : ______________________

Prénom : ______________________

Note et remarque (partie réservée à M. LENZEN) :

/ 40

CONTRÔLE N° 5

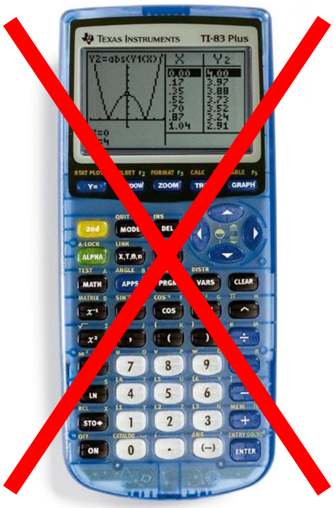
Durée : 2 heures – Notation sur 40, coefficient 5.

Ce sujet comporte 7 pages. Merci de vérifier que le sujet est bien complet avant de commencer.

Si un élève repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il rectifie **EN ROUGE** l'énoncé de la question et poursuit en tenant compte de ses modifications. Ce privilège sera sanctionné s'il est utilisé dans un but de fraude quelconque.

La calculatrice est interdite ! ! !

Tous les exercices sont à faire directement sur le sujet : soignez-le, vous n'en aurez pas d'autre !



Exercice n° 1 – (……/8 points)

Soit $P(x) = x^2 + 4x - 5$. (écriture A)

1. Montre que $P(x) = (x + 5)(x - 1)$. (écriture B)

$(x + 5)(x - 1) = x^2 - x + 5x - 5 = x^2 + 4x - 5 = P(x)$.

2. Montre que $P(x) = (x + 2)^2 - 9$. (écriture C)

$(x + 2)^2 - 9 = x^2 + 4x + 4 - 9 = x^2 + 4x - 5 = P(x)$.

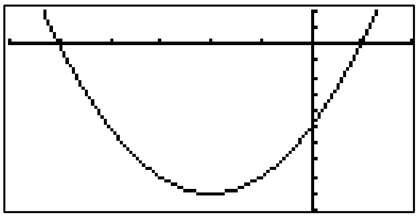
3. Calculer, en précisant à chaque fois l'écriture utilisée :

Calcul de P(0) en utilisant l'écriture A :	Calcul de P(– 2) en utilisant l'écriture C :
$P(0) = 0^2 + 4 \times 0 - 5 = -5$.	$P(-2) = (-2 + 2)^2 - 9 = -9$.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$P(x) = 0$	$P(x) = -9$
On utilise l'écriture B : $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 5)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0$ ou $x - 1 = 0$ $\Leftrightarrow x = -5$ ou $x = 1$ Donc $\mathscr{S} = \{-5 ; 1\}$.	On utilise l'écriture C : $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 - 9 = -9 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0$ $\Leftrightarrow x = -2$ Donc $\mathscr{S} = \{-2\}$.

5. À l'aide de la calculatrice, on a obtenu la courbe représentative $\mathscr{C}$ de P (voir ci-contre).



a) Quelle est la fenêtre graphique ?

Xmin = – 6 ; Xmax = 2 ; Ymin = – 10 ; Ymax = 2.

b) Quel sont les coordonnées du minimum ?

Notons M le point minimum de $\mathscr{C}$. Alors M a pour coordonnées : (– 2 ; – 9).

c) En partant de l'écran ci-contre, sur quelles touches faut-il appuyer pour l'obtenir ?

TI : 2nde [calculs] trace 3 (minimum) → pour « Borne Inf? », « Borne Sup? » et « Valeur Init? », jouer avec ◄ et ► afin de se placer respectivement à gauche, à droite et environ sur le minimum, puis entrer.
CASIO : SHIFT F5 (G-solv) F3 (MIN)

Exercice n° 2 (……/6 points)

On considère une fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous. Les flèches indiquent des variations ***strictes*** :

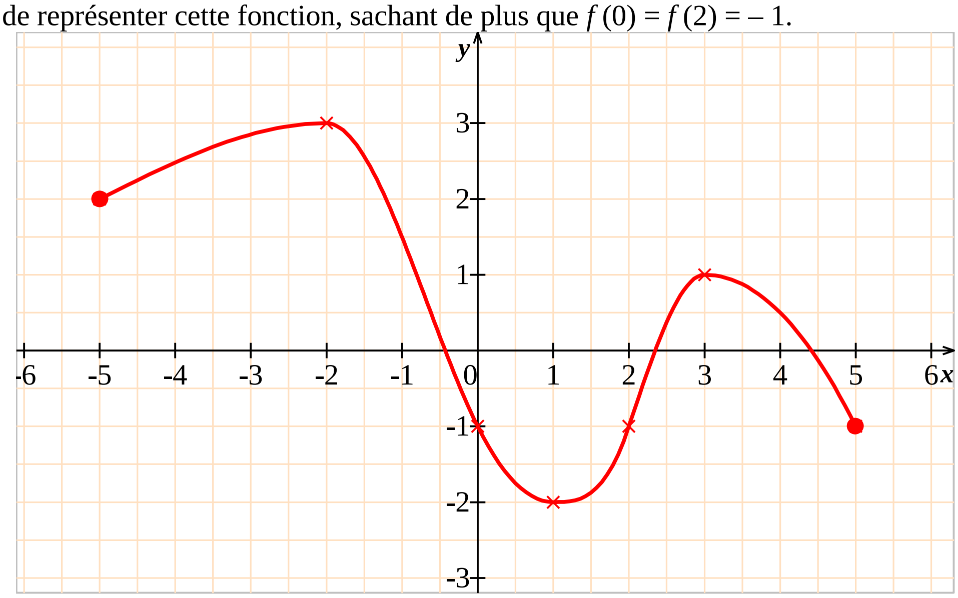
x	– 5		– 2		1		3		5
$f(x)$	2	↗	3	↘	– 2	↗	1	↘	– 2

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ? $\mathscr{D}_f = [-5\,;5]$

2. Compléter le tableau suivant en mettant une croix dans les cases qui conviennent (bonne réponse = + 0,25 pt, mauvaise réponse = – 0,25 pt, absence de réponse = 0 pt) :

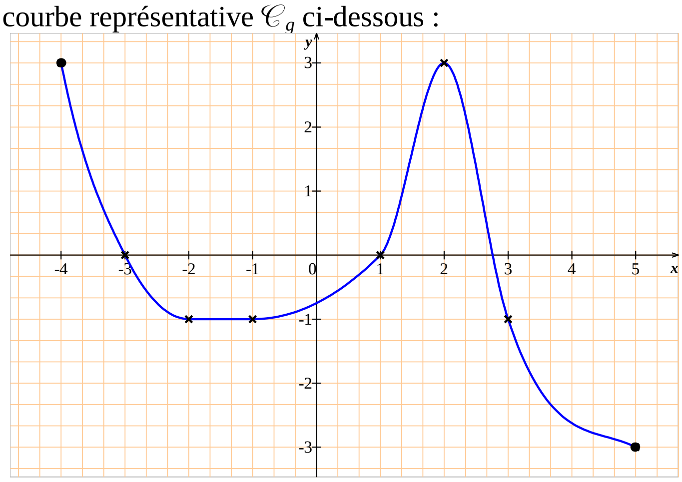
	VRAI	FAUX	Ne permet pas de conclure
$f(-3) > f(3)$	x		
$f(-4) \leqslant f(-1)$			x
$f(-1) < f(0)$	x		
f est croissante sur $[-5\,;1]$		x	
Le maximum de la fonction f sur $[-5\,;5]$ est 5		x	
L'équation $f(x) = -1$ a deux solutions dans $[-5\,;5]$		x	
Le nombre 2 admet deux antécédents dans $[-5\,;5]$	x		
$f(-1) < f(2)$			x
$f(-2) \geqslant f(4)$	x		
$f(2) \geqslant f(4)$			x
f admet deux maximums sur l'intervalle $[-5\,;5]$		x	
L'image de 3 par la fonction f est – 2		x	

3. Construire, dans un repère orthonormé dont vous choisirez vous-mêmes les unités optimales, une courbe susceptible de représenter cette fonction, sachant de plus que $f(0) = f(2) = -1$.



Exercice n° 3 (……/5 points)

Soit g la fonction définie par sa courbe représentative $\mathscr{C}_g$ ci-dessous :



1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction g ? $\mathscr{D}_g = [-4 ; 5]$

2. Quelle est l'image du nombre – 3 par la fonction g ? L'image de – 3 par la fonction g est 0.

3. Quels sont les éventuels antécédents, par la fonction g,

de 3 ?	de 0 ?	de – 1 ?
– 4 et 2	– 3, 1 et environ 2,7	[– 2 ; – 1] et 3

4. Dresse le tableau de variations de la fonction g sur son ensemble de définition :

x	– 4		– 2		– 1		2		5
$g(x)$	3	↘	– 1	→	– 1	↗	3	↘	– 3

Exercice n° 4 (……/4 points)

Coche la ou les case(s) qui convien(nen)t dans chacun des cas suivants (*on ne demande pas de jusitifer*) :

1. Parmi les fractions suivantes, laquelle est un nombre décimal ?

☐ $\frac{17}{99}$ ☑ $\frac{49}{98} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ ☐ $\frac{17}{98}$ ☐ $\frac{49}{99}$

2. Lequel de ces nombres n'est pas un entier ?

☐ $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{13}}$ ☐ $\frac{\sqrt{5^2-3^2}}{4}$ ☑ $(1+\sqrt{2})^2 - 3 \approx 2{,}83$ ☐ $\frac{(\sqrt{2})^4}{4}$

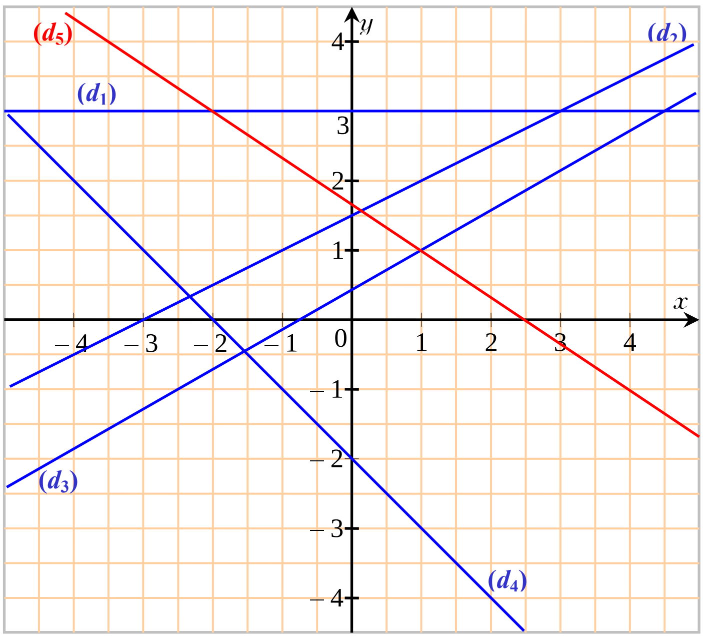
3. Parmi les nombres suivants, lesquels sont égaux à 10^{3000} ?

☐ $10^{300} \times 10^{10}$ ☑ $(10^{300})^{10}$ ☐ $10^{300} \times 10$ ☑ $(10^{100})^{30}$

4. Parmi les nombres suivants, lesquels sont inverses de 5 ?

☑ $\frac{1}{5}$ ☑ 0,2 ☐ 0,5 ☐ (– 5)

Exercice n° 5 (……/8 points)



1. Construis la droite (d_5) et remplis ce tableau :

Droite	Point de la droite	Vecteur directeur	Coefficient directeur	Équation
(d_4)	$(-4\ ;2)$	$(1\ ;-1)$	-1	$y=-x-2$
(d_2)	$(1\ ;2)$	$(2\ ;1)$	$\frac{1}{2}$	$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$
(d_1)	$(0\ ;3)$	$(3\ ;0)$	0	$y=3$
(d_3)	$(1\ ;1)$	$\left(1;\frac{4}{7}\right)$	$\frac{4}{7}$	$y=\frac{4}{7}x+\frac{3}{7}$
(d_5)	$(1\ ;1)$	$\left(1;-\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$

2. Résous le système d'équations suivant, en précisant la méthode choisie :

$$(S)\begin{cases}x-2y=-3\\4x-7y=-3\end{cases}$$

Nous allons résoudre ce système par substitution, en isolant x dans la première équation :

$$(S)\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y-3\\4(2y-3)-7y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y-3\\8y-12-7y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y-3\\y=-3+12=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\times9-3=15\\y=9.\end{cases}$$

Donc $\mathcal{S}=\{(15\ ;9)\}$.

3. Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de (d_2) et (d_3) ? Justifie la réponse.

$$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\\y=\frac{4}{7}x+\frac{3}{7}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y=x+3\\7y=4x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=-3\\4x-7y=-3\end{cases}\Leftrightarrow(S)$$

D'après la question précédente, le point d'intersection de (d_2) et (d_3) a donc pour coordonnées $(15\ ;9)$.

Exercice n° 6 (……/5 points)

Soient x et y deux entiers positifs dont la différence des carrés vaut 144 et dont la somme vaut 24.

1. Écris x^2-y^2 sous la forme d'un produit de facteurs (donc factoriser).

$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ identité remarquable !

2. Déduis-en la valeur de $x-y$.

$$x^2-y^2=144\Leftrightarrow(x-y)(x+y)=144\Leftrightarrow(x-y)\times24=144\Leftrightarrow x-y=\frac{144}{24}=6.$$

D'où $x-y=6$.

3. Connaissant maintenant la somme et la différence de ces deux nombres, donne la valeur de chacun.

L'énoncé suggère deux équations (une pour la somme, une pour la différence) de deux inconnues : il s'agit donc de résoudre un système, en utilisant la méthode par combinaison en additionnant les deux équations du système :

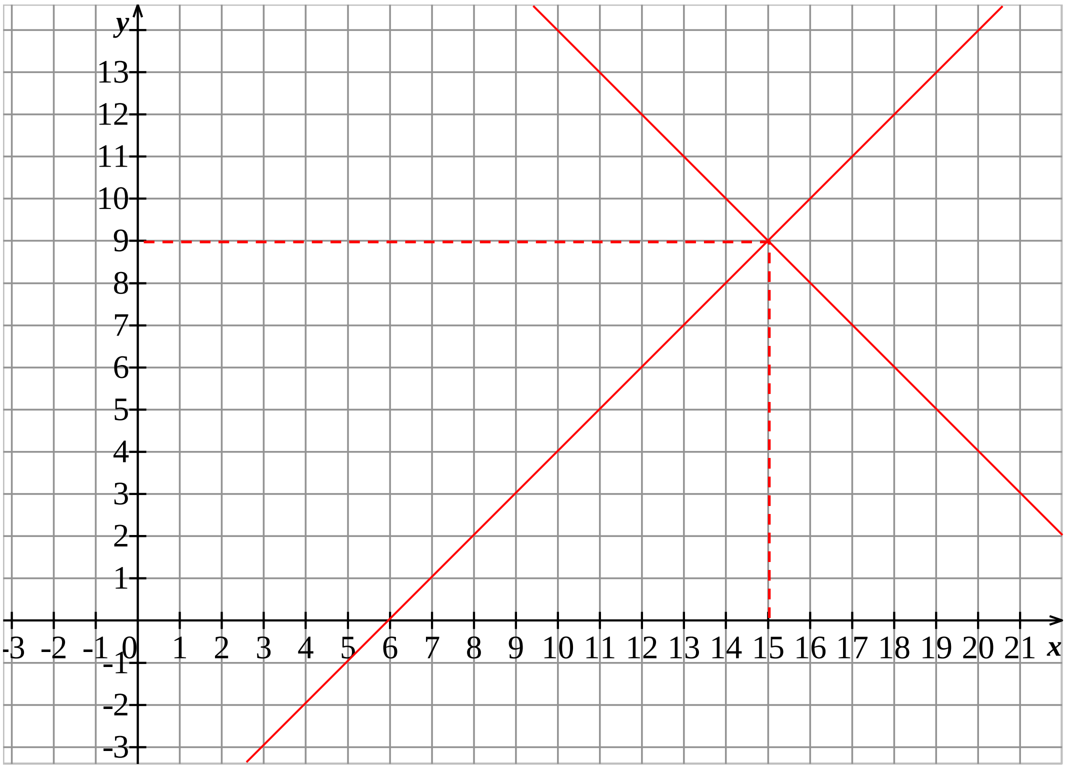
$$\begin{array}{rl} & \begin{cases} x + y = 24 \\ x - y = 6 \end{cases} \\ + & \\ \hline & 2x = 30 \\ & \Leftrightarrow x = 15, \end{array}$$

donc $y = x - 6 = 15 - 6 = 9$. Finalement, $\mathcal{S} = \{(15 ; 9)\}$.

4. Soient $(d_1) : x + y = 24$ et $(d_2) : x - y = 6$ deux droites. Réécris chacune de ces équations de droites sous la forme $y = ax + b$.

$(d_1) : y = 24 - x = - x + 24$ et $(d_2) : y = x - 6$.

5. Dans le repère suivant, trace ces deux droites afin de vérifier ta réponse à la question 3.



Exercice n° 7 (……/4 points)

Détermine l'équation de la droite passant par les points A(4 ; 1) et B(– 1 ; – 1,5) par la méthode de ton choix, en justifiant la réponse.

Soit M(x ; y) un point de la droite (AB). Alors :

M $\in$ (AB) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - 4 \\ y - 1 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\begin{pmatrix} -1 - 4 \\ -1,5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2,5 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow - 5(y - 1) + 2,5(x - 4) = 0 \Leftrightarrow - 5y + 5 + 2,5x - 10 = 0$

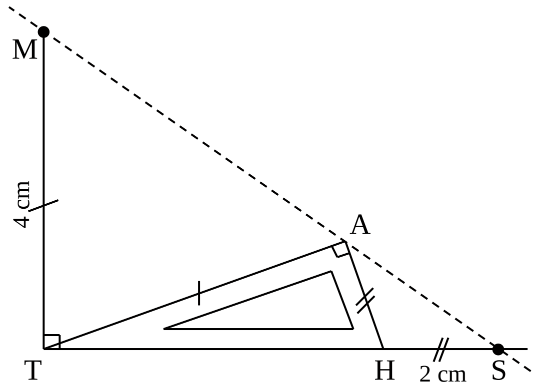
$\Leftrightarrow - 5y = - 2,5x + 5 \Leftrightarrow y = \dfrac{-2,5}{-5}x + \dfrac{5}{-5} \Leftrightarrow y = 0,5x - 1.$

L'équation de la droite (AB) est donc $y = 0,5x - 1$.

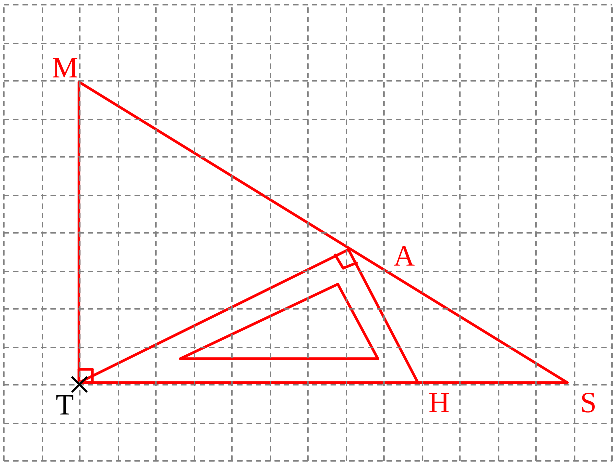
Exercices bonus (……/2 points HORS-BARÈME)

Sur un repère orthonormé, on a posé une mini-équerre de la manière suivante. Le but de cet exercice est de trouver une méthode permettant de prouver que les points S, A et M sont alignés.

On note x l'angle $\widehat{ATM}$.



1. Reproduis, sur le papier à petits carreaux ci-dessous, la figure MATHS en grandeur réelle.



2. Démontre que les points S, A et M sont alignés.

Puisque le triangle MAT est isocèle en T (codage), on a $\widehat{MAT} = \dfrac{180 - \widehat{ATM}}{2} = \dfrac{180 - x}{2} = 90 - \dfrac{x}{2}$.

Les angles $\widehat{ATM}$ et $\widehat{ATH}$ sont complémentaires (*rappel de 5ème : ils forment un angle droit*), donc $\widehat{ATH} = 90 - x$. Mais les angles $\widehat{ATH}$ et $\widehat{THA}$ sont aussi complémentaires car le triangle ATH est rectangle, donc $\widehat{THA} = 90 - \widehat{ATH} = 90 - (90 - x) = x$. Enfin, les angles $\widehat{THA}$ et $\widehat{AHS}$ sont supplémentaires (*rappel de 5ème : ils forment un angle plat*), donc $\widehat{AHS} = 180 - \widehat{THA} = 180 - x$.

Le triangle AHS étant isocèle en H, on a : $\widehat{HAS} = \dfrac{180 - \widehat{AHS}}{2} = \dfrac{180 - (180 - x)}{2} = \dfrac{x}{2}$.

Finalement, $\widehat{MAS} = \widehat{MAT} + \widehat{TAH} + \widehat{HAS} = \left(90 - \dfrac{x}{2}\right) + 90 + \dfrac{x}{2} = 180°$. Puisque c'est un angle plat, les points S, A et M sont bien alignés.

C'EST FINI !!!