SÉQUENCE III

Pythagore

1 Racines carrées

1 Définition

DÉFINITION

La racine carrée d'un nombre positif g est un nombre plus petit p dont le carré vaut g. Autrement dit, la racine carrée p d'un nombre g vérifie $p^2 = g$.

On note ce nombre $\sqrt{g}$. La carré et la racine carrée sont donc liés.

RÈGLE (CARRÉS PARFAITS)

Il va être utile de connaître les premiers carrés parfaits, et donc les premières racines carrées remarquables :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sqrt{x}$
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	x

$\square^2$ $\sqrt{\square}$

2 Calculer une racine carré, simplifier un carré

MÉTHODE (calculer une racine carrée)

Pour calculer la racine carrée de 49 (c'est-à-dire $\sqrt{49}$), on utilise la touche √■ : on tape √■ 4 9 EXE.

Pour calculer une racine carrée en géométrie, lorsqu'on aboutit sur une égalité du type « $AB^2 = 50$ », on écrit :

$AB^2 = 50$
$AB = \sqrt{50}$ ← **on utilise la calculatrice : √■ 5 0 ⇧ EXE**
$AB \approx 7{,}\underline{1}$ cm ← **on n'oublie pas le symbole "≈" si nécessaire, ainsi que l'unité...**

La combinaison de touches ⇧ EXE permet d'obtenir tout de suite une valeur décimale sans que la calculatrice n'affiche de racine carrée. La manipulation est aussi valable avec l'ancienne calculatrice : SECONDE EXE (ou EXE puis S⇔D).

Exemple : En t'aidant de la méthode précédente, calcule les longueurs suivantes (si elles ne tombent pas justes, on arrondira au dixième de centimètre) : $AB^2 = 81$; $CD^2 = 56{,}25$; $EF^2 = 18$ et $GH^2 = 46$:

$AB = 9$ cm ; $CD = 7{,}5$ cm ; $EF \approx 4{,}2$ cm et $GH \approx 6{,}\underline{8}$ cm.

3 Encadrer une racine carrée

MÉTHODE (encadrer une racine carrée par 2 entiers consécutifs)

Pour encadrer $\sqrt{21}$, on écrit :

$$\begin{array}{ccccccl} 16 & \leqslant & 21 & \leqslant & 25 & & \leftarrow \text{on cherche où se trouve 21 dans la 2e ligne du tableau des carrés parfaits} \\ \sqrt{16} & \leqslant & \sqrt{21} & \leqslant & \sqrt{25} & & \leftarrow \text{les racines carrées des 3 nombres sont rangées dans le même ordre} \\ 4 & \leqslant & \sqrt{21} & \leqslant & 5 & & \leftarrow \text{on calcule les racines carrés devant et derrière} \end{array}$$

Pour les nombres plus grands, on les calcule à la calculatrice. La partie entière donne le nombre à gauche.

Exemples : Encadre les racines carrées $\sqrt{21}$, $\sqrt{37}$, $\sqrt{150}$, $\sqrt{200}$, $\sqrt{1\,000}$ et $\sqrt{2\,024}$, par deux entiers consécutifs.

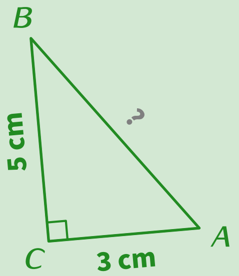
$4 \leqslant \sqrt{21} \leqslant 5$; $6 \leqslant \sqrt{37} \leqslant 7$; $12 \leqslant \sqrt{150} \leqslant 13$; $14 \leqslant \sqrt{200} \leqslant 15$; $31 \leqslant \sqrt{1\,000} \leqslant 32$ et $44 \leqslant \sqrt{2\,024} \leqslant 45$.

2 Calculer une longueur

MÉTHODE (calculer l'hypoténuse)

1. **On écrit le DPC du théorème de Pythagore (⚠ la ligne du “C” ne doit comporter que des lettres !).**
2. **On remplace les longueurs connues et on calcule.**

Exemple :



***Question* : calcule AB *(arrondi au dixième)*.**

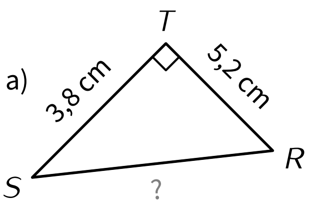
***Réponse* :**

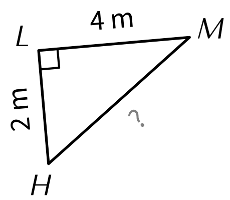
D : ABC **est un triangle rectangle en** C.

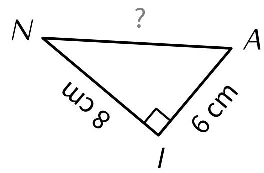
P : **D'après le théorème de Pythagore, on a :**

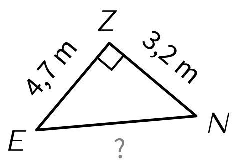
C :
$$\begin{array}{ll} AB^2 = AC^2 + BC^2 & \leftarrow \text{on surligne la longueur à calculer} \\ AB^2 = 3^2 + 5^2 & \leftarrow \text{on remplace les longueurs connues} \\ AB^2 = 34 & \leftarrow \text{on calcule la somme} \\ AB = \sqrt{34} & \leftarrow \text{on simplifie le carré en utilisant } \sqrt{\ } \\ AB \approx 5{,}8 \text{ cm} & \leftarrow \text{on calcule, on arrondit et on n'oublie pas l'unité...} \end{array}$$

■ **EXERCICE (dans ton cahier d'exercices) :** Pour chaque triangle ci-dessous, calcule la longueur de l'hypoténuse, arrondie si nécessaire au dixième près :

a) 

b) 

c) 

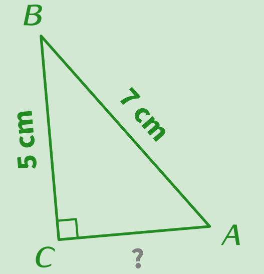
d) 

Solution : $SR \approx 6{,}4$ cm ; $MH \approx 4{,}\underline{7}$ m ; $AN = 10$ cm et $EN \approx 6{,}\underline{7}$ m.

MÉTHODE (calculer un côté de l'angle droit)

❶ **On écrit le DPC du théorème de Pythagore (⚠ la ligne du “C” ne doit comporter que des lettres !).**
❷ **On remplace les longueurs connues et on calcule (⚠ la longueur à calculer est à droite du “=”).**

Exemple :

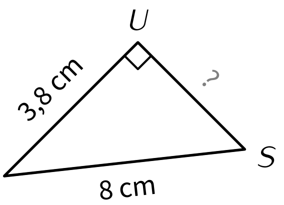


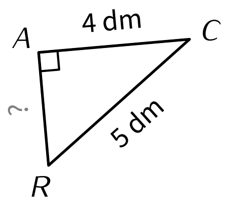
Calcule AC ***(arrondi au dixième).***

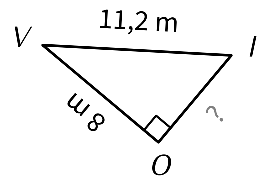
D : ABC **est un triangle rectangle en** C.
P : **D'après le théorème de Pythagore, on a :**
C : $AB^2 = \boxed{AC}^2 + BC^2$ ← **on surligne la longueur à calculer**
$\boxed{AC}^2 = AB^2 - BC^2$ ← **on isole la longueur à calculer ***
$AC^2 = 7^2 - 5^2$ ← **on remplace les longueurs connues**
$AC^2 = 24$ ← **on calcule la somme**
$AC = \sqrt{24}$ ← **on simplifie le carré en utilisant** $\sqrt{\ }$
$AC \approx 4{,}9$ **cm** ← **on calcule, on arrondit et on n'oublie pas l'unité…**

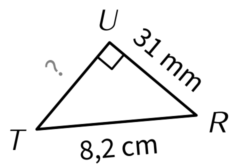
*** : *en isolant la longueur à calculer, le calcul devient « hypoténuse »^{2} – « autre côté »^{2} (soustraction) !*

EXERCICE (dans ton cahier d'exercices) : Pour chaque triangle ci-dessous, calcule la longueur demandée, arrondie si nécessaire au dixième près :

a) 

b) 

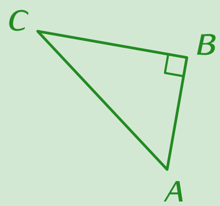
c) 

d) 

Solution : $US \approx 7$ cm ; $CR = 3$ dm ; $IO \approx 7{,}8$ m et $TU \approx 7{,}6$ cm (attention aux unités pour ce dernier calcul…).

3 Montrer qu'un triangle est rectangle ou non

MÉTHODE (montrer qu'un triangle est rectangle ou non)



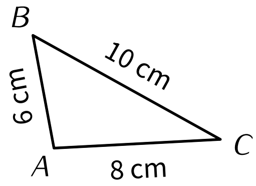
théorème de Pythagore → $AC^2 = AB^2 + BC^2$
← **réciproque du théorème de Pythagore**

– **On utilise la réciproque du théorème de Pythagore pour montrer qu'un triangle est rectangle : pour cela, il suffit de montrer que l'égalité de Pythagore est vraie dans ce triangle.**
– **On utilise la contraposée du théorème de Pythagore pour montrer qu'un triangle n'est pas rectangle : pour cela, il suffit de montrer que l'égalité de Pythagore est fausse dans ce triangle.**

Remarque

Puisqu'on doit tester une égalité, il ne faudra pas oublier de calculer ses deux membres séparément !

Exemple 1 : Est-ce que le triangle suivant est rectangle ? Si oui, en quel point ?



D : La plus grande longueur est BC. ← on cherche le côté le plus long

• $BC^2 = 10^2 = 100$
• $AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100$

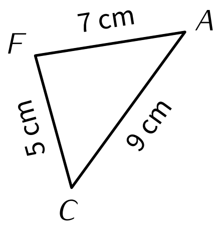
← on teste l'égalité de Pythagore

L'égalité est donc **vraie**. ← on conclut le test : ici l'égalité est **vraie**…

P : D'après la **réciproque** du théorème de Pythagore, ← …donc on utilise la **réciproque**…

C : Le triangle ABC **est rectangle** en A. ← …et le triangle **est rectangle** !

Exemple 2 : Est-ce que le triangle suivant est rectangle ? Si oui, en quel point ?



D : La plus grande longueur est AC. ← on cherche le côté le plus long

• $AC^2 = 9^2 = 81$
• $AF^2 + FC^2 = 7^2 + 5^2 = 74$

← on teste l'égalité de Pythagore

L'égalité est donc **fausse**. ← on conclut le test : ici l'égalité est **fausse**…

P : D'après la **contraposée** du théorème de Pythagore, ← …donc on utilise la **contraposée**…

C : Le triangle FAC **n'est pas rectangle**. ← …et le triangle **n'est pas rectangle** !