Jean Le Rond d'ALEMBERT

Jean Le Rond
d'**Alembert**
(Paris 1717 - id 1783)

Mathématicien et philosophe français. Il a étudié divers domaines mathématiques comme les équations différentielles, les suites, les polynômes, les nombres complexes,...
Il a aussi créé, avec Diderot, l'Encyclopédie appelée aussi "Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers", qui avait pour but de faire connaître les progrès de la science et de la pensée dans tous les domaines.

Quelques résultats obtenus par d'ALEMBERT :

- Il a montré que tout polynôme à coefficients complexes de degré *n* possédait *n* racines (et pouvait donc se factoriser en *n* facteurs du premier degré)
- C'est à lui que l'on doit la définition du nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement :
  $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. (La notation f ' pour la fonction dérivée est due à <u>Lagrange</u>)
- Il a aussi travaillé sur les problèmes de cordes vibrantes et a, pour cette occasion, démontré des résultats sur les équations différentielles aux dérivées partielles.
- Dans le domaine des suites, il a trouvé un critère (qui porte son nom) sur la convergence de séries :
  Si Σu_n est une série dont les termes sont strictement positifs et si on pose
  $L = \lim\limits_{n \to \text{HOME}} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ alors si L > 1, la série diverge et si L < 1, la série converge.
- Il a prouvé que tous les nombres complexes pouvaient s'écrire sous la forme $a + b\sqrt{-1}$ *où* a et b sont des nombres réels. (On ne conservera pas la notation $\sqrt{-1}$ et c'est <u>Euler</u>, en 1777, qui remplacera celle-ci par le nombre complexe i, nombre dont le carré vaut -1.)

Stephan BANACH

Stephan **Banach**
(Cracovie 1892 - Lvov 1945)

Mathématicien polonais. Il fut étudiant à l'école polytechnique de Lvov en Pologne (aujourd'hui cette ville est en Ukraine) en 1910 avant de devenir professeur à l'université. Il est l'un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle. On lui doit les espaces de Banach (qu'il appelait espaces de type (B)).

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet (c'est-à-dire un espace vectoriel dans lequel toutes suites de <u>Cauchy</u> convergent).
Ainsi, IR est un espace de Banach.

Friedrich Wilhelm BESSEL

Friedrich Wilhelm **Bessel**
(Minden 1784 - Königsberg 1846)

Mathématicien et astronome allemand. Il effectua en 1838 la première mesure précise d'une distance stellaire et donna un essor considérable à l'astrométrie.
En mathématiques, il a surtout travaillé sur le calcul différentiel et intégral ainsi que sur le développement en série trigonométrique des fonctions.

Farkas Wolfgang & Janos BOLYAI

Farkas Wolfgang **Bolyai** (Bolya 1775 - Marosvasarhely 1856)

Mathématicien hongrois. Il enseigna les mathématiques, la physique et la chimie à Marosvasarhely toute sa vie. Contemporain de Gauss, il entretient avec lui une longue correspondance. Il s'intéresse aux fondements de la géométrie et plus particulièrement au cinquième postulat d'Euclide.

Janos **Bolyai** (Kolozsvar 1802 - Marosvasarhely 1860)

Son fils Janos (1802-1860), officier du génie, consacre ses loisirs à la construction d'une nouvelle géométrie en remplaçant le cinquième postulat d'Euclide par l'axiome suivant : 'Par tout point extérieur à une droite il passe une infinité de parallèles à cette droite'. Gauss approuve totalement ses recherches et signale qu'il connait déjà ces résultats depuis de nombreuses années : Lobatchevski était arrivé au même résultat que lui. Déçu de ne pas être le premier mathématicien à avoir trouvé cette nouvelle géométrie (géométrie non-euclidienne), Bolyai ne publie plus aucun résultat.
A noter cependant que l'on appelle quelque fois la géométrie dite de Lobatchevski, la géométrie de Bolyai.

Lazare CARNOT

Lazare **Carnot** (Nolay 1753 - Magdebourg 1823)

Ingénieur militaire, politicien français. Il abandonne la politique pour se consacrer aux sciences. Il publie plusieurs livres de géométrie. Il utilise la notion de mesure algébrique (ainsi que la notation usuelle $\overline{AB}$ pour désigner la mesure algébrique de [AB]) et la puissance d'un point par rapport à un cercle.

Augustin Louis CAUCHY

Augustin Louis **Cauchy**
(Paris 1789 - Sceaux 1857)

Son oeuvre se rapporte à de nombreux domaines des mathématiques et de la physique mathématique. Professeur à l'Ecole Polytechnique et au Collège de France, ses cours ont contribué à construire l'analyse sur des nouvelles bases. Il a crée la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Quelques résultats obtenus par CAUCHY :

- En géométrie, il démontra qu'il n'existait que neuf polyèdres réguliers (les cinq convexes connus depuis l'antiquité et quatre non convexes)
- Il a redémontré d'une autre manière la formule d'Euler sur les polyèdres (S + F – A = 2 où S est le nombre de sommets, F le nombre de faces et A le nombre d'arêtes du polyèdre.) et l'a même généralisé.
- Il réforma complètement l'analyse en redéfinissant rigoureusement certains concepts (notions de limites, de continuités, ...)
- Il créa la théorie des fonctions d'une variable complexe (avec les fonctions holomorphes, le théorème des résidus, les intégrales sur un chemin, ...)
- On appelle **suite** de Cauchy, toute suite vérifiant : ε étant fixé arbitrairement, il existe N_ε tel que pour tout m et n supérieur à N_ε , on ait $|u_m - u_n| < \varepsilon$.
  On peut montrer ensuite que toute suite convergente est une suite de Cauchy, et que dans le cas où la suite est une suite réelle, la réciproque est aussi vrai.
- ...

René DESCARTES

(Descartes (anc. La Haye en Indre et Loire) 1596 - Stockholm 1650)

Philosophe, mathématicien et physicien français.Il a développé la géométrie analytique et découvert les lois de la réfraction de la lumière. Il fut l'auteur de plusieurs ouvrages dont "Le discours de la Méthode" et "Géométrie".

René **Descartes**

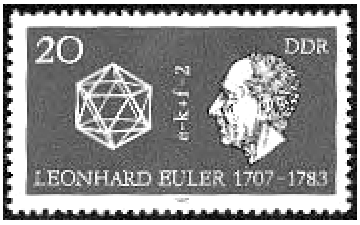
Quelques résultats obtenus par DESCARTES :

- Il a donné aux nombres complexes le nom de nombres imaginaires (C'est Gauss qui les appellera nombres complexes).
- On lui doit les coordonnées dans un repère **cartésien**.

- Il a créé les bases de la géométrie analytique afin de résoudre des problèmes de géométrie à l'aide de calculs qui utilisent les quatre opérations usuelles et l'extraction des racines.

Une remarque au sujet des timbres de 1937 :
Ces deux timbres ne sont pas identiques. En effet le timbre, émis pour le tricentenaire du "Discours **de** la Méthode", est paru avec une erreur : on y voit le texte "Discours **sur** la Méthode". Lorsque l'administration des PTT, s'aperçut de cette erreur, elle demanda à tous ses guichets de renvoyer les timbres à l'effigie de Descartes. Cela se passa sans mal, sauf dans le Finistère, où les marins d'un bateau argentin, qui avait fait escale, avaient déjà acheté certains de ces timbres puis avaient envoyé leurs correspondances. Les PTT ne pouvant donc détruire tous les timbres avec l'erreur, décidèrent pour éviter une spéculation, de mettre sur le marché les deux timbres. Cependant les collectionneurs de l'époque préférèrent bien sûr les timbres comportant l'erreur ; c'est pourquoi aujourd'hui le timbre normal cote plus cher que l'erreur !

Léonhard EULER



Léonhard **Euler**
(Bâle 1707 - S[t] Petersbourg 1783)

Astronome, physicien et mathématicien suisse qui a aussi vécu et travaillé à Saint Petersbourg. Son œuvre, d'une ampleur considérable concerne toutes les branches des mathématiques, pures ou appliquées, et de la physique. C'était un très puissant calculateur, même quand à la fin de sa vie il devint aveugle. Mais avant tout, il fut capable d'inventer de nouvelles démarches, de nouvelles voies, avec une grande audace, laissant à ses successeurs la tâche difficile de justifier, en toute rigueur, les résultats qu'il avait obtenus à sa manière !

Quelques résultats obtenus par EULER :

- En analyse, il a définit la notion de fonction et de dérivée.
  C'est à lui que l'on doit la notation $f(x)$. Il donne la définition des fonctions puissances, logarithmes et exponentielles (qu'il notera e^x)
- Il étudit les nombres complexes et appelle i le nombre dont le carré vaut -1. Il établira ensuite les formules $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, ainsi que $e^{i\pi} + 1 = 0$.
- Il étudit les polyèdres et trouve la formule S – A + F = 2 (e – k + f = 2 en allemand d'après le timbre) où S est le nombre de sommets, F le nombre de faces et A le nombre d'arêtes du polyèdre.
- Beaucoup de théorèmes portent son nom dont par exemple celui de la droite d'Euler : "Dans un triangle non équilatéral, c'est la droite passant par le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit".

Pierre de FERMAT

Pierre de **Fermat**
(Beaumont-de-Lomagne
1601 - Castres 1665)

Magistrat à la cour de Toulouse et mathématicien français. Bien qu'il ait contribué à l'essor du calcul différentiel, des probabilités et de la géométrie analytique, il est surtout connu grâce à ses résultats en théorie des nombres.

Quelques résultats obtenus par FERMAT :

- Pour tout entier $n > 2$, l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution avec x, y et z entiers.
  Fermat a écrit avoir trouvé une démonstration de ce résultat mais qu'elle était trop longue pour tenir dans la marge de ses écrits. Du coup, on ne retrouva pas cette démonstration dans le cas général (on sait qu'il l'a effectivement trouvé pour $n = 3$ et $n = 4$). On pense même qu'il s'était trompé dans sa démonstration. Ce ne sera pas le seul : plusieurs générations de mathématiciens se sont cassés les dents sur ce théorème. Il faudra attendre près de 350 ans pour qu'un anglais, André Wiles, prouva ce théorème dans son intégralité en 1993. Ce théorème fut cependant prouvé pour quelques cas particuliers : pour $n = 4$ par Euler et Gauss, pour $n = 5$ par Dirichlet (en 1828) et Legendre (en 1830), pour $n = 5$ par Lamé, ...
- Le petit théorème de Fermat : Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p, alors p divise $a^p - a$.
- Les nombres premiers de la forme $4n + 1$ sont égaux à la somme de deux carrés d'entiers.
- Les nombres de Fermat : Ce sont les nombres de la forme $1 + 2^{2^n}$ avec n entier. Les premiers nombres de Fermat sont 3, 5, 17, 257, 65537 qui sont des nombres premiers. Fermat pensait que tous ces nombres étaient premiers. Ce qui n'est pas le cas car pour $n = 5$, on obtient le nombre 4.294.967.297 qui est divisible par 641 (démontré par Euler en 1732).
  Ces nombres interviennent dans le résultat suivant (dû à Gauss) :
  Les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas sont ceux dont le nombre de côtés n est de la forme 2^n avec $n > 1$ ou de la forme $2^n\, p_1 p_2 \cdot\cdot\cdot\, p_r$ avec n entier et où les p_i sont des nombres de Fermat premiers distincts.

Evariste GALOIS

Evariste **Galois** (Bourg-la-Reine 1811 - Paris 1832)

Mathématicien français. Entré en 1830 à l'École Normale, exclu en 1831 pour ses opinions politiques, il meurt en duel à l'âge de 20 ans pour une "infâme coquette". Son oeuvre géniale ne fut appréciée qu'après sa mort. La nuit qui précéda son duel, il résuma à grands traits, dans sa lettre à Auguste Chevalier, sa théorie des équations algébriques, ainsi que des résultats sur les intégrales abéliennes ... Ses travaux sont à la base de la notion de groupe.

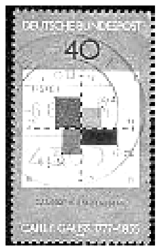
Quelques résultats obtenus par GALOIS :

- Il a prouvé l'impossibilité de résoudre par radicaux (c'est-à-dire à l'aide des 4 opérations et de l'extraction de racines) les équations de degré supérieur ou égal à 5.
- Il a inventé la notion de groupes distingués, de groupes résolubles et a développé toute une partie de la théorie des groupes afin de résoudre le problème des équations.
- Aujourd'hui, la "Théorie de Galois" constitue un des chapitres fondamentaux de l'algèbre.

Carl Friedrich GAUSS

Carl Friedrich **Gauss** (Brunswick 1777 - Gôttingen 1855)

Astronome, physicien et mathématicien allemand parfois surnommé "le Prince des Mathématiciens". A vingt ans il avait déjà assez de découvertes à son actif pour assurer sa célébrité. Il a renouvelé totalement les méthodes de l'arithmétique et apporté de nombreuses contributions tant en maths "pures" qu'"appliquées". On lui doit aussi la méthode des moindres carrés, la théorie des erreurs (courbe de Gauss) et d'importantes découvertes sur la théorie des surfaces.



Gauss et les nombres complexes

Quelques résultats obtenus par GAUSS :

- On lui doit la méthode du pivot de Gauss qui consiste, pour résoudre un système d'équations linéaires, à faire des opérations sur les lignes et les colonnes de manière à obtenir un système triangulaire. Ce qui permet de résoudre plus aisément le système d'équations.
- La somme des n premiers nombres est donné par la formule : $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

  En effet, si on écrit $S = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n$ et la même somme en sens inverse : $S = n + (n-1) + ... + 3 + 2 + 1$, on obtient en ajoutant ces deux égalités : $2S = n\,(n+1)$., d'où le résultat.
  Gauss aurait trouvé cette méthode à l'age de sept ans avec $n = 100$.
- On lui doit le symbole des congruences : $\equiv$
  $a \equiv b$ (modulo p) si $a - b$ est divisible par p.
- Si p divise ab et si le PGCD$(a,p) = 1$ alors p divise b.
- Il a étudié la construction des polygones réguliers à la règle et au compas et prouvé le résultat suivant : Les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas sont ceux dont le nombre de côtés n est de la forme 2^n avec $n > 1$ ou de la forme $2^n\, p_1 p_2 \cdot\cdot\cdot\, p_r$ avec n entier et où les p_i sont des nombres de Fermat premiers distincts.
- Il a définit clairement les nombres complexes (c'est lui qui leur donna ce nom, Descartes les appelant nombres imaginaires). Il les écrit sous la forme $a + bi$, leur donne une interprétation géométrique et étudie les fonctions d'une variable complexe.
- Il définit la loi normale (appelé aussi loi de Laplace-Gauss) utilisée en statistique.

  La loi normale centrée réduite a pour densité la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. C'est la représentation de cette fonction qui donne la courbe en 'cloche' de Gauss (que l'on peut voir sur le billet de 10 marks ci-dessous).

Joseph Louis, comte de LAGRANGE

Joseph Louis **Lagrange** (Turin 1736-Paris 1813)

Il commença ses études en Italie, obtint son premier poste de professeur en Allemagne, puis s'établit en France, où il fit le reste de sa carrière. Il s'est illustré aussi bien dans les mathématiques "pures" comme l'arithmétique, ou "appliquées" comme la mécanique et les équations différentielles. Il présida la commission chargée d'établir le système des poids et mesures en 1790.

Quelques résultats obtenus par LAGRANGE :

- Il créa la notation $f'(x)$ pour la dérivée d'une fonction et la notation (u_n) pour désigner le terme de rang n d'une suite numérique.
- Il fait le lien entre le signe de la dérivée d'une fonction et le sens de variation de celle-ci :
"Si $f'(x) > 0$, alors la fonction f est strictement croissante"
- Il démontra le théorème : "Tout entier naturel est la somme d'au plus quatre carrés"
Par exemple : $71 = 2^2 + 3^2 + 3^2 + 7^2$
- Au cours de travaux sur la résolution des équations algébriques par radicaux, il prouve ce qui allait devenir le théorème de Lagrange : "Le cardinal d'un sous-groupe divise celui du groupe". Il l'a cependant démontré sous une autre forme, la notion de groupes n'étant pas encore inventée (elle est due à Galois).

Gottfried Wilhelm LEIBNIZ

Gottfried Wilhelm **Leibniz**
(Leipzig 1646 - Hanovre 1716)

Philosophe et mathématicien allemand. Il crée, en même temps que Newton, le calcul différentiel et intégral. Il a résolu des équations différentielles et développé en série les fonctions trigonométriques. On lui doit de nombreuses notations.

Passionné pour le calcul mécanique, il invente la première multiplicatrice (La Pascaline, inventée quelques années plus tôt par Pascal, ne permettait de faire que des additions et des soustractions).

Quelques résultats obtenus par LEIBNIZ :

- On lui doit la notion de fonction et de dérivée.
- Pour les notations : *dx* pour la différentielle, *dy/dx* pour la dérivée, $\int$ pour le signe intégral, *ab* pour la multiplication $a \times b$ (sans le $\times$),...
- La relation de Leibniz : si G désigne le barycentre d'un système de n points pondérés (A_i, a_i) :
$$\sum_{i=1}^{n}(a_i \cdot MA_i^2) = \sum_{i=1}^{n}(a_i) \cdot MG^2 + \sum_{i=1}^{n}(a_i) \cdot GA_i^2.$$
- La fonction scalaire de Leibniz : $f(M) = \sum_{i=1}^{n}(a_i \cdot MA_i^2)$.
- Il maîtrisait parfaitement le langage binaire, constitué uniquement de 0 et de 1, et savait effectuer les quatre opérations avec celui-ci.
- Il inventa les "cylindres de Leibniz" qui équipent sa multiplicatrice et qui furent repris dans bon nombres de machines des siècles suivants (Monroe, Curta, Madas, ...)

Isaac NEWTON

Issac **Newton** (Wollsthorpe 1642 - Kensington 1727)

Mathématicien et physicien anglais. Il décompose la lumière, crée la théorie de la gravitation universelle, invente le télescope. Il invente, séparément mais en même temps que Leibniz, les bases du calcul différentiel et intégral (qu'il appelle "Méthodes des Fluxions").

Quelques résultats obtenus par NEWTON :

- Il utilise beaucoup la mécanique et la géométrie pour obtenir des résultats mathématiques. Il obtient ainsi la notion de limite par le biais de celle de vitesse instantanée.

- Méthode de Newton pour la résolution des équations du type f(x) = 0 avec f dérivable au voisinage de la racine cherchée.
- Le binôme de Newton : $(a + b)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ avec $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ où $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.

Blaise PASCAL

Blaise **PASCAL** (Clermont-Ferrand 1623 - Paris 1662)

Philosophe, physicien et mathématicien français. Il fit à 17 ans un "Essai sur les coniques", et à 19 ans, il construisit la première machine à calculer de l'histoire : la Pascaline. Il développa le calcul des probabilités.

Quelques résultats obtenus par PASCAL :

- Il a justifié les critères de divisibilités par 3, 9 et 11.
- Il a développé le calcul des probabilités pour estimer les chances de gagner à des jeux de hasard.
- En physique, il travailla sur la pression atmosphérique (Le pascal est une unité de pression : 10^5 Pa = 1 bar)
- Le triangle de Pascal qui permet de calculer les $C_n^k = \binom{n}{k}$ (nombre de façons de choisir k éléments dans un ensemble de n éléments distincts sans ordre) et qu'on retrouve dans la formule du binôme de Newton.
- Il a construit la première machine à calculer. Celle-ci était surtout une additionneuse et permettait de faire, outre les additions, les soustractions et avec moins de commodités les multiplications et les soustractions. Une vingtaine de machines auraient été construites et neuf exemplaires sont aujourd'hui recensés (dont huit dans des musées).

Henri POINCARE

Henri **Poincaré** (Nancy 1854 - Paris 1912)

Mathématicien français (A ne pas confondre avec Raymond Poincaré (1860-1934), un cousin, président de la 3ème république).
Il fut un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Les voies, que ses recherches ont ouvertes, ont mobilisé les chercheurs pour un siècle, et les mobilisent encore. En particulier il a étudié le problème "des trois corps" : comment joue la gravitation entre par exemple le soleil, la terre et la lune ? Il a montré que ce problème ne pouvait pas être résolu par le calcul, car la situation est trop "instable".

PYTHAGORE

(Samos v. -570 - Métaponte v. -480)

⇇ Le théorème de Pythagore

Sûrement le mathématicien le plus connu de tous : Son théorème a en effet été enseigné à des générations entières. Mais contrairement à ce que l'on peut croire, ce théorème est en fait antérieur à Pythagore : Les babyloniens le connaissaient déjà un millénaire avant lui !

Quelques résultats obtenus par PYTHAGORE (ou par ses disciples) :

- Pour lui, la terre était sphérique et tournait sur elle-même en tournant autour du soleil (héliocentrisme). C'est Galilée et Copernic qui prouva ceci près de 2000 ans plus tard !
- Le théorème de Pythagore (qui n'est pas de lui !) :
  "Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés"
- La table de Pythagore : (tableau permettant de déterminer le résultat d'une opération).
  Ci-dessous celle pour la multiplication :

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Remarque sur le timbre :
Ce timbre illustre le théorème de Pythagore avec le triplet bien connu (3 ; 4 ; 5) qui vérifient $3^2 + 4^2 = 5^2$.
Sur chaque côté du triangle, on construit des carrés qui ont justement pour aire la longueur de chaque côté au carré. En comptant le nombre de carreaux dessinés dans chaque carré, on constate que $3^2 + 4^2 = 5^2$ d'où la démonstration du théorème de Pythagore (sur un exemple).

Le RUBIK's CUBE

Ernö Rubik (Budapest 1944-) Enseignant à l'école supérieure des Arts décoratifs, diplômé d'architecture et inventeur du Rubik's Cube en 1977.

Le Rubik's Cube

Le **Rubik's Cube** est un casse-tête des années 1980 qui essaye de revenir sur le marché en ce moment : On trouve beaucoup d'imitations de toutes sortes pour une vingtaine de francs dans certains bazars. Il faut compter environ 80 F pour un vrai Rubik's cube (celui-ci doit porter le logo Rubik's Cube au centre de la face blanche). Si pour commencer, n'importe quel cube permet de comprendre la difficulté à reconstruire les six faces, seul un vrai vous permettra de le finir rapidement (Je l'ai testé pour vous). Je possède, en effet, plusieurs cubes. Plus précisément je les collectionne. Il existe en effet plusieurs dérivés du cube. Citons le Master Rubik's Cube (qui possède 4×4 carrés sur chaque face), un mini cube (2×2 carrés sur chaque face), l'Octocube (en forme de prisme régulier qui se déforme dès que l'on commence à tourner ses faces), le Tenbirion (appelé aussi tonneau du diable), la Pyraminx (en forme de pyramide), la tour de Babylone, le Rubik's Clock (constitués de 9 cadrans horaires à remettre à l'heure),...

J'arrête là mon énumération, il y en a d'autres (voir à ce sujet, trois articles parus dans le magazine Pour La Science : le n° 43, année 1981 (pour la résolution du cube), le n° 34, août 1980 (Cube hongrois et théorie des groupes (réservé à des matheux !!) et le n° 59, sept 1982 (après le cube, des sphères, des pyramides,...).

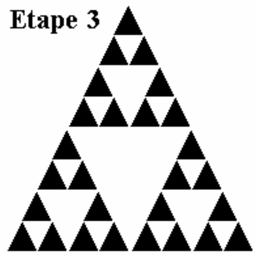
Waclaw SIERPINSKI

Waclaw **SIERPINSKI**
(Varsovie 1882 - Varsovie 1969)

Mathématicien polonais. Il reçu son doctorat en 1908, et devint professeur à l'université de Lvov. Il y consacre alors ses recherches à la théorie des nombres. Après la seconde guerre mondiale, il obtient en 1919 un poste à l'université de Varsovie où il y restera jusqu'à sa mort. Entre temps, il aura écrit plus de 700 articles et 50 livres dont "La théorie des nombres irrationnels" (1910), "La théorie des nombres" (1912), ...

Le triangle de Sierpinski (appelé aussi tamis de Sierpinski) :
C'est une figure fractale comme il en existe beaucoup d'autres. Rappelons qu'une image fractale est obtenue en partant d'un dessin plus ou moins compliqué et en lui appliquant une certaine transformation géométrique qui lui ajoute une complexité. On recommence alors à appliquer la même transformation au nouveau dessin obtenu et ainsi de suite une infinité de fois.
Le terme de 'fractale' a été donné par le mathématicien français Benoît Mandelbrot en 1975. De nos jours, l'étude (qui n'est pas chose facile) et la représentation d'une fractale sont simplifiées grâce aux ordinateurs. On peut ainsi dessiner une nouvelle fractale rapidement en ne modifiant que quelques paramètres. Cela n'a cependant pas été le cas de quelques fractales du début du siècle comme le flocon de neige de Von Koch, les ensembles de Julia, le triangle de Sierpinski (en 1915) ...

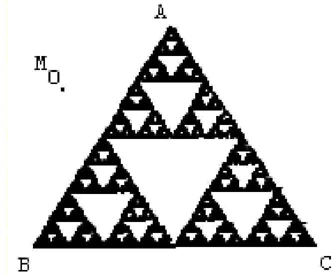
Le triangle de Sierpinski est obtenu en partant d'un triangle équilatéral. On prend les milieux de chacun de ses côtés et on enlève le triangle équilatéral ainsi obtenu. On obtient alors trois nouveaux triangles équilatéraux. On recommence alors l'opération précedente à chacun de ces nouveaux triangles, et ainsi de suite. On obtient alors neuf, vingt-sept, quatre-vingt-un, ... nouveaux triangles.
La figure obtenue s'appelle **le triangle de Sierpinski**.



Une autre manière de retrouver le triangle de Sierpinski :

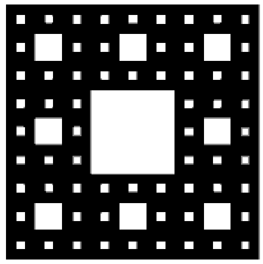
Il nous faut pour cela un triangle équilatéral ABC et un dé. On choisit n'importe où un point M et on lance alors le dé. Si celui ci fait 1 ou 2, on trace le milieu I du segment [AM], s'il fait 3 ou 4, on trace le milieu I du segment [BM] et enfin s'il fait 5 ou 6, on trace le milieu I du segment [CM]. On remplace ensuite le point I par M et on recommence.

En faisant cela un grand nombre de fois (500 minimum), on voit apparaître le triangle de Sierpinski (la figure ci-contre a été obtenue à l'aide de 5000 points avec le logiciel Géoplanw).



De la même manière, on peut obtenir le tapis de Sierpinski (ou carré). Celui-ci est obtenu à l'aide d'un carré plein. On le partage en 9 et on enlève le carré central. On recommence alors cette opération avec les huit carrés restants et ainsi de suite... En continuant une infinité de fois, on obtient une fractale appelée **le tapis de Sierpinski**.

C'est une figure dont la surface est nulle mais dont le périmètre total de ses trous est infini !


Etape 3

Petites énigmes

<u>Petit problème</u> :
On choisit au hasard une page dans un livre et on fait la moyenne des numéros des pages restantes. On trouve 265,9. Déterminer le numéro de la page choisie et le nombre de pages de ce livre.

<u>Solution</u> :
Soit n le nombre de pages du livre et n_0 le numéro de la page choisie. $n, n_0 \in \boxed{\tan}^*$.
La somme des numéros des pages de tout le livre est S = 1 + 2 + 3 + … + n.
On peut aussi écrire S sous la forme S = n + … + 3 + 2 + 1 et en ajoutant ces deux manières d'écrire S, on obtient 2S = n*(n + 1). D'où $S = \frac{n(n+1)}{2}$. (formule due à <u>Gauss</u>)
Donc la moyenne des numéros des pages restantes est

$$\frac{S - n_0}{n - 1} = \frac{\frac{n(n+1)}{2} - n_0}{n - 1} = 265{,}9 \qquad (*)$$

.

Ce qui nous donne une équation à deux inconnues. Maintenant, on a 1 $\boxed{\text{ENG}}$ n_0 $\boxed{\text{ENG}}$ n d'où :

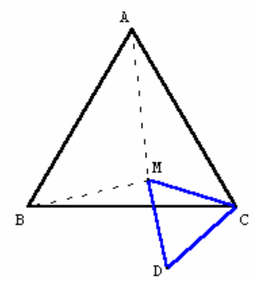
$$\frac{\frac{n(n+1)}{2} - n}{n - 1} \boxed{\text{ENG}} \frac{\frac{n(n+1)}{2} - n_0}{n - 1} \boxed{\text{ENG}} \frac{\frac{n(n+1)}{2} - 1}{n - 1}$$

c'est-à-dire $\frac{n}{2} \boxed{\text{ENG}} 265{,}9 \boxed{\text{ENG}} \frac{n+2}{2}$. On a donc (n étant entier) : n = 530 ou 531.
Si n = 530, l'équation devient $\frac{140715 - n_0}{529} = 265{,}9$ d'où $n_0 = 53{,}9$ qui n'est pas entier.
Si n = 531, l'équation devient $\frac{141246 - n_0}{530} = 265{,}9$ d'où $n_0 = 319$ qui est entier.

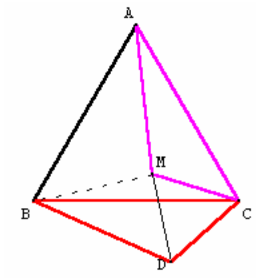
Le livre a donc 531 pages et la page choisie a le numéro 319.

<u>Enoncé</u> :
J'habite à la campagne, dans une zone en forme de triangle équilatéral délimité par 3 villages. Ma maison se trouve, à vol d'oiseau, à 3 km, 4 km et 5 km des trois villages.
De combien de km, chaque village est-il distant des deux autres ?

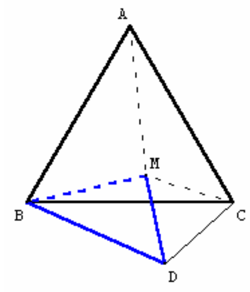
<u>La solution</u> :



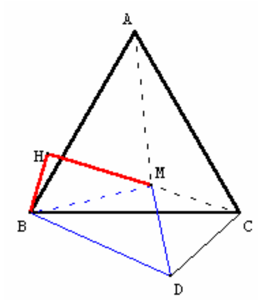
Appelons A, B et C les 3 villages, et M ma maison. On a alors AM = 5, BM = 4, CM = 3 et on cherche la valeur de AB = AC = BC =: a.
Si on appelle D l'image de M par la rotation de centre C et d'angle 60°, le triangle MCD est équilatéral et chacun de ses côtés mesure 3 km.



Considérons les triangles AMC et BDC. Ils ont un angle de même mesure ($\widehat{ACM} = \widehat{BCD}$ = 60° – MCB) compris entre deux côtés respectivement de même longueur (AC = BC = a et MC = CD = 3). Ils sont donc isométriques. On en déduit que BD = AM = 5.



Le triangle MBD a donc ses trois côtés qui mesurent MB = 4, MD = 3 et BD = 5. D'après la réciproque du théorème de Pythagore ($MD^2 + BM^2 = BD^2$), MBD est un triangle rectangle. Donc l'angle $\widehat{DMB}$ = 90°.



Soit H le projeté orthogonal de B sur (MC).
L'angle $\widehat{HMB} = 180 - \widehat{DMB} - \widehat{DMC} = 180 - 90 - 60 = 30°$.
Dans le triangle rectangle MHB, on a alors : BH = BM × sin 30° = 2,
HM = BM × cos 30° = $2\sqrt{3}$.
Dans le triangle rectangle BHC, on a alors :
$BC^2 = BH^2 + HC^2$
$a^2 = 4 + (2\sqrt{3} + 3)^2$
$a^2 = 4 + 12 + 12\sqrt{3} + 9$
$a^2 = 25 + 12\sqrt{3}$
Chaque village est donc distant de $\sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$ km, soit environ 6,766 km (au mètre près).

Savez-vous que : $\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right)$