CAPES 2006

Deuxième composition

1 Etude de la quadrique $\mathscr{Q}$ et de la conique $\mathscr{C}$

1.1 Intersections de $\mathscr{Q}$ avec une famille de plans

On pose $\overrightarrow{u} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{k}$.

a) Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ étant déjà orthogonaux et unitaires, il suffit de calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ pour obtenir un troisième vecteur $\overrightarrow{w}$ de sorte que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ soit une base orthonormée directe de E. Il vient que

$$\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Définissons la matrice $P_{\mathscr{R}_0 \to \mathscr{R}_1}$ de passage de la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ à la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$:

$$P_{\mathscr{R}_0 \to \mathscr{R}_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il vient alors, en reprenant les notations de l'énoncé, que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P_{\mathscr{R}_0 \to \mathscr{R}_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + z_1) \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - z_1) \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors l'équation de $\mathscr{Q}$ dans le repère $\mathscr{R}_1$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(x_1+z_1)^2 - \frac{3}{2}(x_1+z_1)(x_1-z_1) + \frac{1}{2}(x_1-z_1)^2 + z_1\sqrt{2} - \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{\sqrt{10}}{5}y_1 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{x_1^2}{2} - \frac{y_1^2}{2} + \frac{5z_1^2}{2} + \frac{\sqrt{10}}{5}y_1 + z_1\sqrt{2} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x_1^2 + y_1^2 - 5z_1^2 - \frac{2\sqrt{10}}{5}y_1 - 2z_1\sqrt{2} = 0
\end{aligned}$$

c) Soient $t \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{P}_t$ le plan d'équation $z_1 = t$. $\mathscr{P}_t$ est un plan parallèle à l'axe $(O, \overrightarrow{k})$, et ses deux points d'intersection avec les deux autres axes du repère $\mathscr{R}_0$ sont à égale distance de l'origine O (on remarquera que le produit de l'ordonnée du point d'intersection de $\mathscr{P}_t$ avec l'axe des ordonnées et de l'abscisse du point d'intersection de ce plan avec l'axe des abscisse est négatif).

L'intersection de $\mathscr{P}_t$ et $\mathscr{Q}$ se traduit par l'égalité suivante :

$$x_1^2 + y_1^2 - 5t^2 - \frac{2\sqrt{10}}{5}y_1 - 2t\sqrt{2} = 0,$$

qui est équivalente à

$$x_1^2+\left(y_1-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2=5t^2+2t\sqrt{2}+\frac{2}{5}.$$

Le membre de droite de cette équation est un trinôme du second degré dont le discriminant est nul, ce qui traduit que ce trinôme est positif pour toute valeur de t. On reconnait ainsi l'équation d'un cercle de centre $C_t\left(0,\sqrt{10}/5,t\right)_{\mathscr{R}}$ et de rayon $R_t=\sqrt{5t^2+2t\sqrt{2}+\dfrac{2}{5}}$.

d) La valeur de t pour laquelle le cercle précédent se réduit à un point est $t=-\sqrt{2}/5$. C'est la racine de multiplicité 2 du membre de droite de l'égalité ci-dessus. Le cercle est alors confondu avec son centre $S\left(0,\sqrt{10}/5,-\sqrt{2}/5\right)_{\mathscr{R}}$. Ses coordonnées dans le repère $\mathscr{R}_0$ sont donc :

$$P_{\mathscr{R}_0\to\mathscr{R}_1}\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{10}/5\\ -\sqrt{2}/5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/5\\ 1/5\\ \sqrt{10}/5\end{pmatrix},$$

ce qui correspond au résultat annoncé.

1.2 Nature de $\mathscr{Q}$ et de $\mathscr{C}$

a) Tout point $M(x_1,y_1,z_1)_{\mathscr{R}_1}=M(X,Y,Z)_{\mathscr{R}}$ vérifie les égalités suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l}x_1=X\\ y_1=Y+\sqrt{10}/5\\ z_1=Z-\sqrt{2}/5\end{array}\right. .$$

L'équation de $\mathscr{Q}$ s'écrit alors dans le repère $\mathscr{R}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}&X^2+\left(Y+\sqrt{10}5\right)^2-5\left(Z-\sqrt{2}5\right)^2-\frac{2\sqrt{10}}{5}\left(Y+\sqrt{10}5\right)-2\sqrt{2}\left(Z-\sqrt{2}5\right)=0\\ \Leftrightarrow\quad &X^2+Y^2-5Z^2=0.\end{aligned}$$

b) La quadrique $\mathscr{Q}$ est de type hyperboloïde. Remarquons que si X,Y ou Z vaut 0 (on ne s'intéresse donc qu'à l'intersection de la quadrique avec un plan formé de deux vecteurs du repère $\mathscr{R}$), la restriction de $\mathscr{Q}$ au plan considéré donne une réunion de deux droites sécantes en l'origine S, ce qui nous permet d'affirmer que $\mathscr{Q}$ est un cône de révolution. Son axe contient donc le point S, et est dirigé par le troisième vecteur du repère $\mathscr{R}$. Autrement dit, l'axe de la quadrique $\mathscr{Q}$ est la droite définie par

$$\left\{\begin{array}{l}z=\sqrt{10}/5\\ y=-x.\end{array}\right.$$

c) L'équivalence se déduit des questions précédentes :

$$\begin{aligned}M\in\mathscr{P}\quad&\Leftrightarrow\quad z=0\\ &\overset{1.1.b)}{\Leftrightarrow}\quad y_1=0\\ &\overset{1.2.a)}{\Leftrightarrow}\quad Y+\frac{\sqrt{10}}{5}=0.\end{aligned}$$

La figure se trouve en annexe A.2.

d) On constate que la quadrique $\mathscr{Q}$ est symétrique par rapport aux axes des abscisses et des ordonnées du repère $\mathscr{R}$. Nous ne nous intéresserons donc qu'au cercle dont le centre voit sa troisième coordonnée positive. Pour tout point $M(0,0,Z)_{\mathscr{R}}$ (avec $Z \geqslant 0$) est donc à égale distance des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. Remarquons que la distance d'un tel point aux deux droites constitue une bijection de $\mathbb{R}_+$ (la coordonnée Z positive) vers $\mathbb{R}_+$ (la distance considérée).

La droite $\mathscr{D}$ étant l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$, elle est parallèle à l'axe $(S, \overrightarrow{w})$ et à distance fixe de celui-ci, à savoir $\sqrt{10}/5$. On note ρ cette quantité. Puisque $\rho > 0$, il existe un unique $Z_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que la distance du point $\Omega_1(0,0,Z_0)_{\mathscr{R}}$ aux deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ soit égale à ρ.

Le second cercle admet donc ρ comme rayon et le point $\Omega_2(0,0,-Z_0)_{\mathscr{R}}$ comme centre.

e) On ne s'intéressera qu'à la sphère de centre Ω_1, l'autre cas se démontrant par symétrie. Le plan $\mathscr{P}$ étant parallèle à l'axe $(S, \overrightarrow{w})$, le minimum de la distance de l'axe au plan est réalisée pour tout point de la projection orthogonale de l'axe sur le plan, c'est-à-dire $\mathscr{D}$. Mais cette distance est égale à ρ d'après la question précédente, donc la sphère de centre Ω_1 et de rayon ρ est bien tangente au plan $\mathscr{P}$ en un point que l'on note F_1.

Quant à la quadrique, ayant constaté que c'est un cône de révolution, et que la sphère est aussi une surface de révolution de même axe, il suffit de faire « tourner » la figure plane de la question c autour de l'axe $(S, \overrightarrow{w})$ de révolution pour en déduire que la sphère est tangente à $\mathscr{Q}$ le long d'un cercle que l'on note $\mathscr{C}_1$.

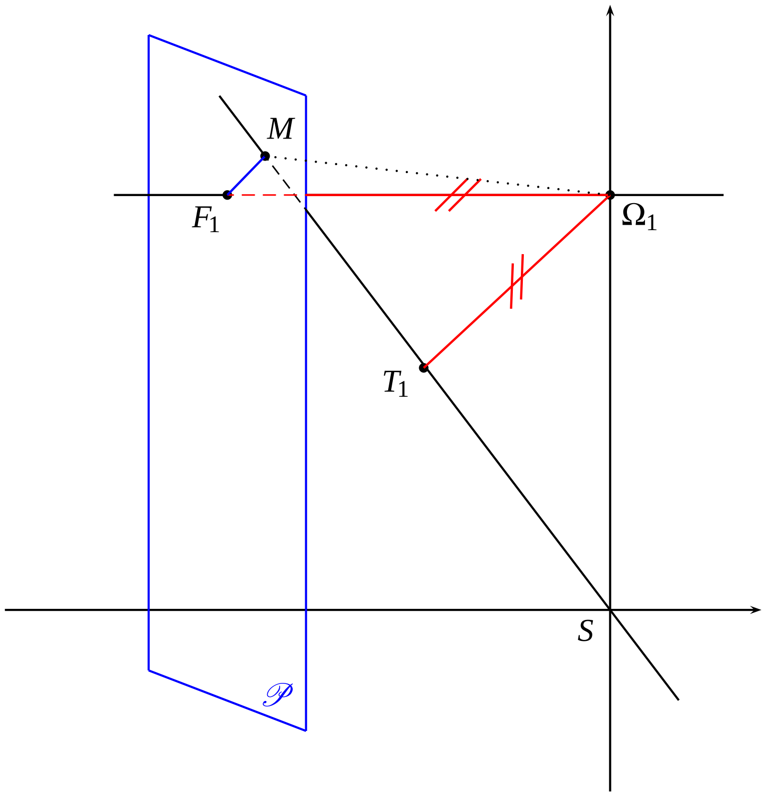
1.3 Deux caractérisations de $\mathscr{C}$

a) Soit M un point quelconque de $\mathscr{C}$. En particulier, $M \in \mathscr{Q}$, de sorte que les points M, S et Ω_1 soient coplanaires avec S et Ω_1 sur l'axe de révolution de $\mathscr{Q}$. Puisque $S \in \mathscr{Q}$, on en déduit alors que la droite (MS) est incluse dans la quadrique $\mathscr{Q}$. Une figure illustrant cette question se trouve à la fin de celle-ci...

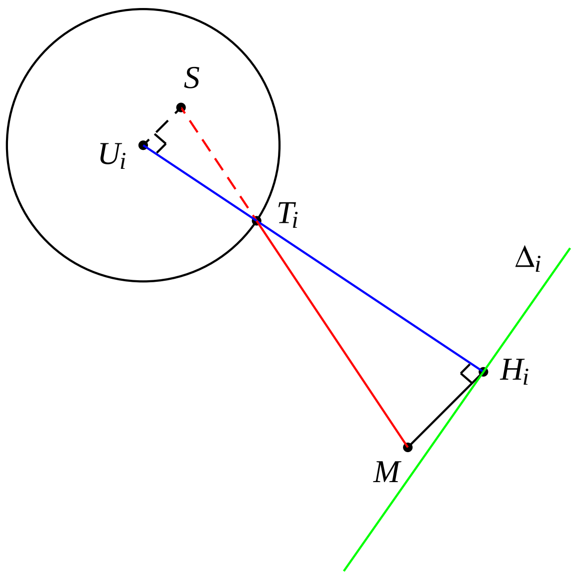
Le but est de montrer que les triangles $MF_i\Omega_i$ et $MT_i\Omega_i$ sont isométiques. Soit $i \in \{1,2\}$. Remarquons tout d'abord que $T_i \in \mathscr{C}_i$ implique que $\Omega_i T_i = \rho$. Cette distance est aussi égale à $\Omega_i F_i$. De plus, les triangles $MF_i\Omega_i$ et $MT_i\Omega_i$ possèdent un côté commun. Enfin, puisque $M \in \mathscr{P}$ et que F_i est le projeté orthogonal de Ω_i sur $\mathscr{P}$, il vient que l'angle $\widehat{MF_i\Omega_i}$ est droit. On a vu en 1.1.e que la sphère de centre Ω_i et de rayon ρ était tangente à la quadrique $\mathscr{Q}$ au cercle $\mathscr{C}_i$ en un point que l'on a noté T_i, d'où l'orthogonalité des droites (MT_i) et $(T_1\Omega_i)$. Au final, nous sommes en présence de deux triangles rectangles $MF_i\Omega_i$ et $MT_i\Omega_i$ qui possèdent la même hypothénuse et un autre côté de même longueur : ils sont isométriques, et on a donc $MT_i = MF_i$.

Supposons que la troisième coordonnée de M dans le repère $\mathscr{R}$ soit positive. Alors $MT_1 < MT_2$, et donc $MT_2 = MT_1 + T_1T_2$, de sorte que $|MT_1 - MT_2| = MT_2 - MT_1 = MT_1 + T_1T_2 - MT_1 = T_1T_2$. Supposons-la alors négative, auquel cas $MT_2 < MT_1$, et donc $MT_1 = MT_2 + T_1T_2$, ce qui implique que $|MT_1 - MT_2| = MT_1 - MT_2 = MT_2 + T_1T_2 - MT_2 = T_1T_2$. Notons tout de même que le plan $\mathscr{P}$ est fixé de telle sorte que M ne puisse pas appartenir au segment $[T_1, T_2]$, auquel cas l'égalité aurait été fausse.

On retrouve ainsi la propriété suivante : ?



b) H_i est par construction le projeté orthogonal de M sur la plan contenant $\mathscr{C}$ (que l'on notera dans la suite $\mathscr{P}_i$). Par définition de $\mathscr{C}$, l'axe de révolution $(S, \overrightarrow{w})$ est orthogonal au plan $\mathscr{P}_i$, de sorte que $U_i \in \mathscr{P}_1$ soit le projeté orthogonal de S. Le point T_i appartenant à $\mathscr{P}_i$, il est naturellement projeté orthogonal de lui-même sur ce plan. Il vient que la droite (H_iU_i) est l'image par cette projection de la droite (SM), et ces droites sont sécantes en T_i, et forment donc un plan qui contient ces 5 points. En conclusion, les points M, S, H_i, T_i et U_i sont bien coplanaires. Illustrant ceci par une figure :



On se place alors dans ce plan afin d'appliquer le théorème de Thalès dans les triangles T_iU_iS et T_iH_iM sécants en T_i :

$$\frac{MH_i}{MT_i} = \frac{SU_i}{ST_i}.$$

Le membre de droite est une quantité constante, puisque les points S et U_i sont fixés et indépendants de la position du point M, et lorsque M parcourt $\mathscr{C}$, T_i parcourt $\mathscr{C}_1$ qui est fixe.

On retrouve ainsi la propriété suivante : ?

2 Résolution de l'équation diophantienne pour n assez petit

On rappelle l'équation à résoudre :
$$\binom{n}{p-1} = \binom{n-1}{p}. \qquad (\Sigma_1)$$

2.1 Une étude élémentaire

a) Pour que les coefficients binomiaux aient du sens, il faut que $n-1 \geqslant p$, c'est-à-dire $n \geqslant p+1$ (ce qui implique aussi que $n \geqslant p-1$). De plus, $p-1$ doit être positif, ce qui nous amène à écrire que $p+1 \geqslant 2$. On obtient donc la double inégalité suivante :
$$2 \leqslant p+1 \leqslant n.$$
Supposons alors cette première condition réalisée. On a alors les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}\binom{n}{p-1} = \binom{n-1}{p} &\Leftrightarrow \frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!} = \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}\\ &\Leftrightarrow \frac{n}{(n-p+1)(n-p)} = \frac{1}{p}\\ &\Leftrightarrow np = (n-p+1)(n-p)\\ &\Leftrightarrow n^2+p^2-3np+n-p = 0.\end{aligned}$$
Au final, on a bien montré que :
$$\binom{n}{p-1} = \binom{n-1}{p} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2 \leqslant p+1 \leqslant n \\ n^2+p^2-3np+n-p = 0.\end{cases}$$
La première double-inégalité est vérifiée pour tout entier $n \geqslant 2$, alors que la seconde ne l'est pour aucune valeur strictement positive de n.

b) Ce polynôme peut se réécrire sous la forme $X^2-(3n+1)X+n(n+1)$. Son discriminant vaut alors $\Delta_n = (3n+1)^2-4n(n+1) = 5n^2+2n+1$, et on constate qu'il est strictement positif puisque $n \in \mathbb{N}^*$, de sorte que ce polynôme possède deux racines réelles distinctes. Posons alors, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = 3n+1$ et $b_n = \Delta_n = 5n^2+2n+1$. Une récurrence immédiate montre que ces suites sont bien à valeurs dans $\mathbb{N}$ (plus précisément $\mathbb{N}^*$). Ainsi
$$X_1 = \frac{a_n-\sqrt{b_n}}{2} \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{a_n+\sqrt{b_n}}{2}.$$

c) Soit b un entier naturel. Le sens indirect est trivial, puisque la définition de b étant un carré parfait impose à $\sqrt{b}$ d'être entier, donc rationnel. Montrons alors le sens direct par contraposée : supposons que b ne soit pas un carré parfait, c'est-à-dire que $\sqrt{b} \notin_N$, et montrons que $\sqrt{b}$ n'est pas non plus rationnel. Supposons un instant que $\sqrt{b}$ le soit. Alors il existerait deux entiers naturels A et B (B non nul) tels que $\sqrt{b} = A/B$. Cette quantité n'étant pas entière, B ne divise pas A, donc B^2 ne divise pas A^2. Il vient que $b = A^2/B^2$ n'est pas entier, ce qui est une contradiction. Donc $\sqrt{b}$ n'est pas rationnel.

d) Supposons que (n,p) est une solution de (Σ_1). D'après ce qui précède, pour $n \geqslant 2$, p est solution du polynôme de la question 2.1.a. Plus précisément,

$$p = \frac{a_n - \sqrt{b_n}}{2} \Leftrightarrow a_n - 2p = \sqrt{b_n}.$$

En effet, si p était égal à X_2, cela contredirait la condition $2 \leqslant p+1 \leqslant n$, d'après cette même question 2.1.a. Or a_n est entier (toujours 2.1.a) et $2p$ l'est aussi, ce qui impose à $\sqrt{b_n}$ d'être entier, et il suffit alors d'appliquer 2.1.b pour en déduire que $b_n = 5n^2+2n+1$ est un carré parfait.

e)

f) Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$. L'idée de l'algorithme serait de faire varier n de 1 à n_0, vérifier à chaque étape si $5n^2+2n+1$ est un carré parfait, et si tel est le cas, alors le calcul de $(3n+1-\sqrt{5n^2+2n+1})/2$ donne l'autre entier p recherché. Résumons cela (E désigne la fonction « partie entière ») :

pour n allant de 1 à n_0 faire :
  si $\sqrt{5n^2+2n+1} - E(\sqrt{5n^2+2n+1}) < 10^{-5}$ alors
    $(3n+1-\sqrt{5n^2+2n+1})/2 \to p$
    affiche p
  fin du si
fin boucle.

2.2 Une méthode plus arithmétique

On se donne maintenant un couple (n,p) solution de Σ_1.

a) Supposons que n et p soient premiers entre eux. Puisque ces deux entiers sont solutions de Σ_1, ils vérifient en particulier la seconde égalité du système établi à la question 2.1.a :

$$n^2+p^2-3np+n-p=0 \Leftrightarrow np = n^2 - n(p-1) - pn + p(p-1) \Leftrightarrow np = (n-p)\big(n-(p-1)\big).$$

On poursuit encore un peu plus loin ce raisonnement :

$$np = (n-p)\big(n-(p-1)\big) \Leftrightarrow n\big(p-n+(p-1)+p\big) = p(p-1) \Leftrightarrow n(3p-n-1) = p(p-1).$$

Il découle de cette égalité que n divise le produit $p(p-1)$, et puisque n et p sont premiers entre eux, le théorème de Gauss nous permet de conclure que n divise $p-1$.

Ceci constitue une contradiction dans le sens où (n,p) est solution de Σ_1 implique en particulier que $n > p-1$, donc il n'existe pas de couples solutions de Σ_1 formés d'entiers premiers entre eux.

b) • On utilise l'égalité de la question précédente (où l'hypothèse de primalité n'a pas été utilisée pour la montrer) :

$$r^2uv = r(u-v)(n-p-1) \Leftrightarrow ruv = (u-v)(n-p-1).$$

On en déduit que r divise le produit $(u-v)(n-p-1)$. Or $n-p-1 = r(u-v)-1 = r(u-v-1)+(r-1)$, et $r-1<r$. On poursuit ainsi l'algorithme d'Euclide : si $r>2$, $r=(r-1)+1$ avec $1<r-1$, et la dernière étape nous assure alors que les entiers $n-p-1$ et r sont premiers entre eux, et si $r=2$, alors $2 = 1\cdot 2+0$, et l'on arrive à la même conclusion : les entiers $n-p-1$ et r sont premiers. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Gauss pour conclure que r divise $u-v$.

-
-
-

c) Implentons l'algorithme vu en 2.1.f dans la calculatrice. Celle-ci nous donne alors les couples solutions suivants, pour $n \leqslant 105$:

$$(2,1), \qquad (15,6) \qquad \text{et} \qquad (104,40).$$

3 Un groupe de transformations affine conservant $\mathscr{S}$

3.1 Définition d'un nouveau repère $\mathscr{R}_1$ associé à la conique $\mathscr{C}$

a) Soit $I(-1/5,1/5)_{\mathscr{R}_0}$, et posons $x_1 = x+1/5$ et $y_1 = y-1/5$. L'équation de la conique $\mathscr{C}$ dans le repère $(I, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est donnée par

$$\begin{aligned} &\left(x_1-\frac{1}{5}\right)^2 - 3\left(x_1-\frac{1}{5}\right)\left(y_1+\frac{1}{5}\right) + \left(y+\frac{1}{5}\right)^2 + x_1 - \frac{1}{5} - \left(y_1+\frac{1}{5}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x_1^2 - 3x_1y_1 + y_1^2 - \frac{1}{5} = 0. \end{aligned}$$

b) Remarquons que $a^2+b^2-3ab = b^2-(3a)b+(a^2)$. Cette quantité est donc un trinôme du second degré d'inconnue b, dont le discriminant vaut $5a^2 \geqslant 0$, et admet donc deux solutions réelles, ce qui nous permet de le factoriser et obtenir finalement :

$$a^2+b^2-3ab = \left(b - a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(b - a\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right).$$

c)

d)

3.2 Transformations affines conservant $\mathscr{C}$

a)

b) On constate que G_1 est non vide car Id est bien une bijection de $\mathscr{P}$ sur lui-même tel que $\mathrm{Id}(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$. Soient alors g et h deux éléments de G_1. Alors

$$(g \circ h^{-1})(\mathscr{C}) = g\big(h^{-1}(\mathscr{C})\big) = g(\mathscr{C}) = \mathscr{C}.$$

L'avant-dernière égalité se déduit de la bijectivité de $h \in G_1$:

$$h(\mathscr{C}) = \mathscr{C} \Leftrightarrow h^{-1}\big(h(\mathscr{C})\big) = h^{-1}(\mathscr{C}) \Leftrightarrow \mathscr{C} = h^{-1}(\mathscr{C}).$$

c)

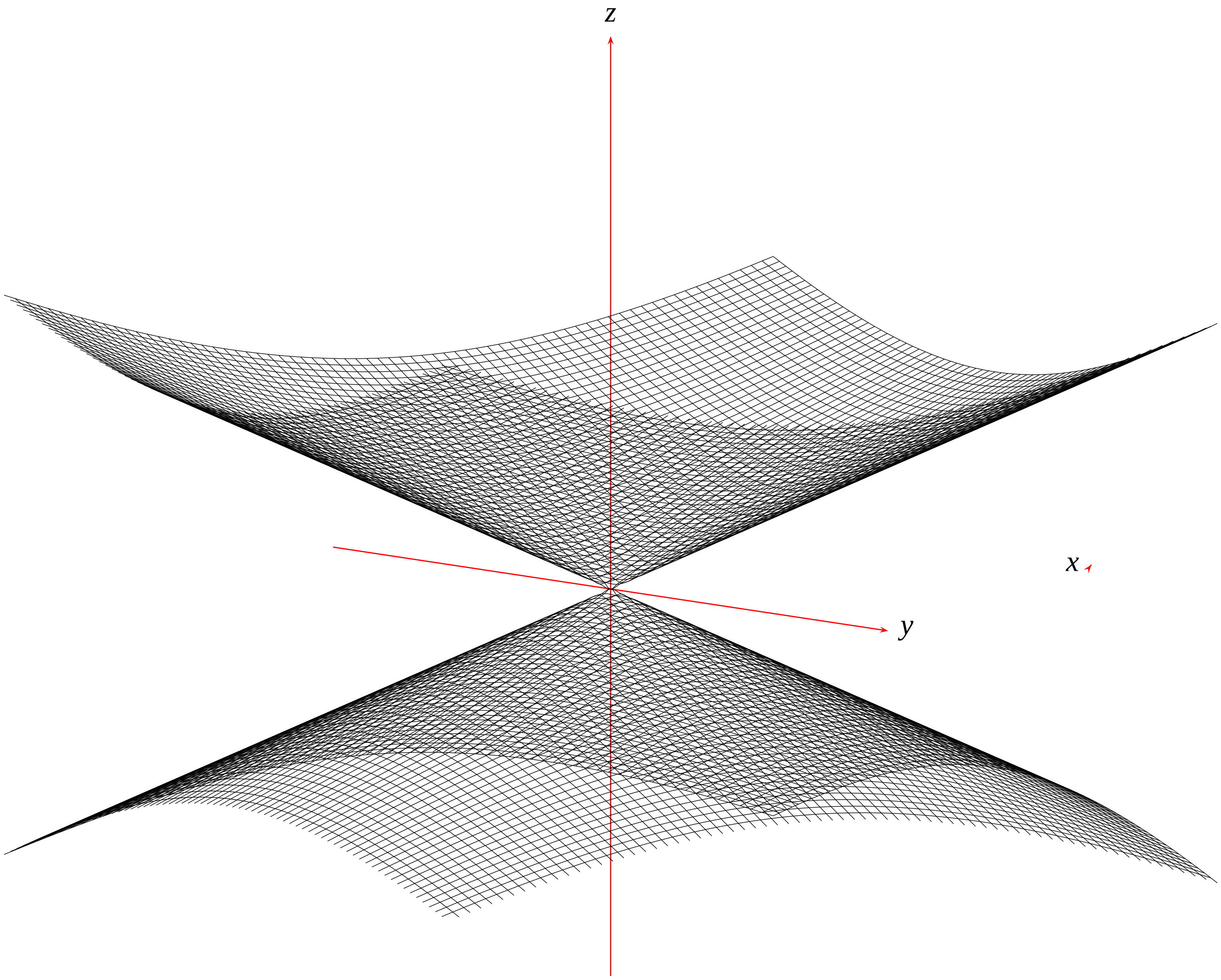
d)

e)

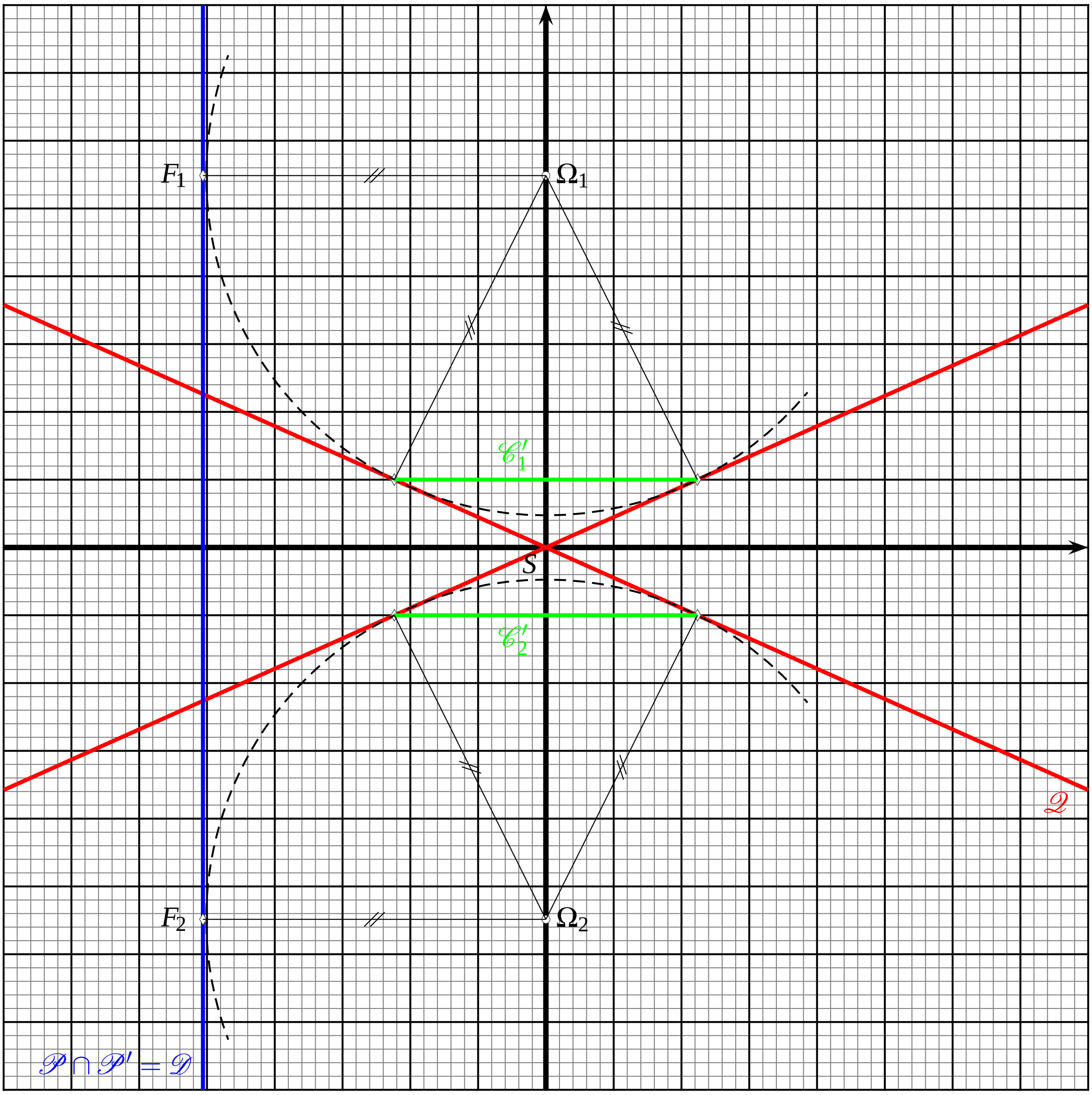
f)

A Figure de la partie 1

A.1 La quadrique $\mathscr{Q}$ dans le repère $\mathscr{R}$



A.2 Figure demandée à la question 1.2.c



$\mathscr{C}'_1$ et $\mathscr{C}'_2$ désignent respectivement les projetés des cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sur le plan $\mathscr{P}'$.