Calcul des « sommes de Sam », notées $\mathcal{J}(x)$:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{J} : \mathcal{D}_{\mathcal{J}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x}. \end{array}$$

Dans toute cette étude, n désignera un entier naturel non nul. Nous allons aussi utiliser les notations suivantes [1] :

$$\mathcal{J}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+x}.$$

Domaine de définition de $\mathcal{J}$ et $\mathcal{L}$

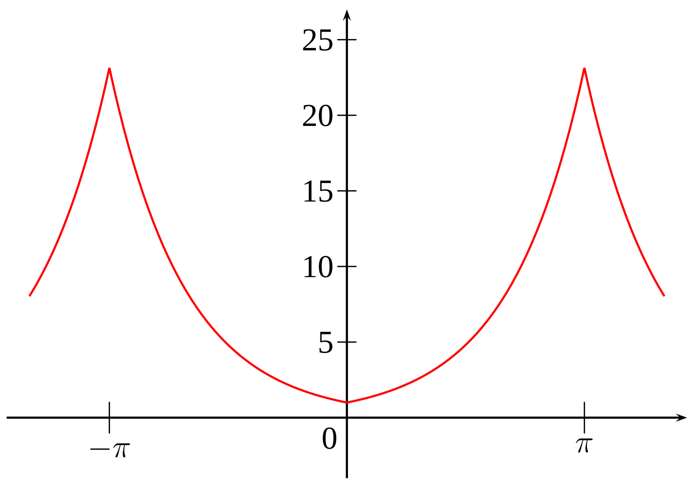
Pour que ces deux fonctions existent, il suffit simplement de s'arranger pour que leur dénominateur commun $n^2 + x$ ne s'annule pour aucun n. Or

$$n^2 + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 = -x \quad \Leftrightarrow \quad n = \sqrt{-x}.$$

Posons $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{-x} \in \mathbb{N}^*\} = \{-1, -4, -9, -16, \ldots\}$[2]. Il vient que le le dénominateur n'est nul que lorsque $x \in \mathbb{S}$. On en déduit que $\mathcal{D}_{\mathcal{J}} = \mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{S}$, ce qui fait de $\mathcal{J}, \mathcal{L} : \mathbb{R}\backslash\mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ des applications. Dans la suite, x désignera alors un réel n'appartenant pas à $\mathbb{S}$.

1 Etude d'une première fonction

On considère la fonction f suivante, définie sur $[0, \pi]$ comme étant paire et 2π-périodique, par $f(t) = e^{t\sqrt{x}}$.



[1] : $\mathcal{J}$ est une notation choisie pour rappeler que cette fonction a été explicitement déterminée par Sam, et j'ai attribué la fonction $\mathcal{L}$ à mon propre nom de famille – avec l'aimable autorisation de Sam, sous prétexte que j'ai retapé informatiquement son délire !).

[2] : $\mathbb{S}$ comme « Sqrt », c'est-à-dire racine carrée en français.

1.1 Calcul de $a_0(f)$

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{t\sqrt{x}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left[\frac{e^{t\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right]_0^{\pi} = \frac{2(e^{\pi\sqrt{x}}-1)}{\pi\sqrt{x}}.$$

1.2 Calcul des coefficients de Fourier réels $\big(a_n(f)\big)_{n\geqslant 1}$

Par définition, on a :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{t\sqrt{x}}\,\mathrm{d}t,$$

car les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto \cos(nt)$ sont toutes les deux paires.

◇ *1^{re} intégration par parties* :

On définit deux fonctions u et v' sur $\mathbb{R}_+^*$, et on en calcule respectivement la dérivée et une primitive :

$$\begin{aligned} u(t) = e^{t\sqrt{x}} &\quad\Rightarrow\quad u'(x) = \sqrt{x}\,e^{t\sqrt{x}} \\ v(t) = \frac{\sin(nt)}{n} &\quad\Leftarrow\quad v'(t) = \cos(nt). \end{aligned}$$

Alors u et v soient de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et le théorème d'intégration par parties nous assure que

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{t\sqrt{x}}\,\mathrm{d}t &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{e^{t\sqrt{x}}\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{x}\,e^{t\sqrt{x}}\sin(nt)}{n}\,\mathrm{d}t \\ \Leftrightarrow\quad a_n(f) &= -\frac{2\sqrt{x}}{\pi n}\int_0^{\pi} e^{t\sqrt{x}}\sin(nt)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

◇ *2^e intégration par parties* :

On définit une fonction w' sur $\mathbb{R}_+^*$ dont on calcule une primitive, ce qui donne

$$w(t) = -\frac{\cos(nt)}{n} \quad\Leftarrow\quad w'(t) = \sin(nt).$$

La fonction w étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut à nouveau appliquer le théorème d'intégration par parties (en utilisant aussi u définie plus haut) afin d'obtenir

$$\begin{aligned} a_n(f) &= -\frac{2\sqrt{x}}{\pi n}\left[-\frac{e^{t\sqrt{x}}\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2\sqrt{x}}{\pi n}\int_0^{\pi} -\frac{\sqrt{x}\,e^{t\sqrt{x}}\cos(nt)}{n}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{\pi n^2}\big(e^{\pi\sqrt{x}}(-1)^n - 1\big) - \frac{2x}{\pi n^2}\int_0^{\pi} e^{t\sqrt{x}}\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{\pi n^2}\big((-1)^n\,e^{\pi\sqrt{x}} - 1\big) - \frac{x}{n^2}\,a_n(f). \end{aligned}$$

On en tire alors les coefficients recherchés :

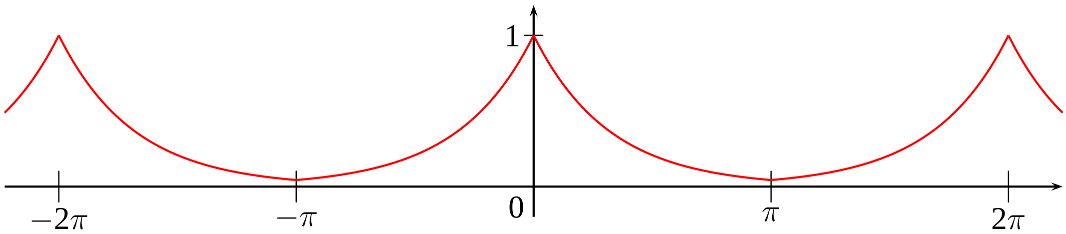
$$\begin{aligned} & \left(1+\frac{x}{n^2}\right) a_n(f) = \frac{2\sqrt{x}}{\pi n^2}\left((-1)^n\, e^{\pi\sqrt{x}} - 1\right) \\ \Leftrightarrow \quad & a_n(f) = \frac{2\sqrt{x}\big((-1)^n\, e^{\pi\sqrt{x}} - 1\big)}{\pi n^2}\,\frac{n^2}{n^2+x} \\ \Leftrightarrow \quad & a_n(f) = \frac{2\sqrt{x}\big((-1)^n\, e^{\pi\sqrt{x}} - 1\big)}{\pi(n^2+x)}. \end{aligned}$$

1.3 Calcul des coefficients de Fourier réels $\big(b_n(f)\big)_{n\geqslant 1}$

Puisque la fonction f est paire, il vient directement que $b_n(f) = 0$.

2 Etude d'une seconde fonction

On considère la fonction g suivante, définie sur $[0,\pi]$ comme étant paire et 2π-périodique, par $f(t) = e^{-t\sqrt{x}}$.



2.1 Calcul de $a_0(g)$

$$a_0(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t\sqrt{x}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{e^{-t\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right]_0^{\pi} = \frac{2(1-e^{-\pi\sqrt{x}})}{\pi\sqrt{x}}.$$

2.2 Calcul des coefficients de Fourier réels $\big(a_n(g)\big)_{n\geqslant 1}$

Par définition, on a :

$$a_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t\sqrt{x}}\,\mathrm{d}t,$$

car les fonctions $t \mapsto g(t)$ et $t \mapsto \cos(nt)$ sont toutes les deux paires.

$\diamondsuit$ *1re intégration par parties* :

On définit deux fonctions u et v' sur $\mathbb{R}_+^*$, et on en calcule respectivement la dérivée et une primitive :

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-t\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad u'(x) = -\sqrt{x}\, e^{t\sqrt{x}} \\ v(t) &= \frac{\sin(nt)}{n} \quad \Leftarrow \quad v'(t) = \cos(nt). \end{aligned}$$

Alors u et v soient de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et le théorème d'intégration par parties nous assure que

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{-t\sqrt{x}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{e^{-t\sqrt{x}}\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{-\sqrt{x}\, e^{-t\sqrt{x}}\sin(nt)}{n}\,\mathrm{d}t \\ \Leftrightarrow \quad & a_n(g) = \frac{2\sqrt{x}}{\pi n}\int_0^\pi e^{-t\sqrt{x}}\sin(nt)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

$\diamondsuit$ *2e intégration par parties* :

On définit une fonction w' sur $\mathbb{R}_+^*$ dont on calcule une primitive, ce qui donne

$$w(t) = -\frac{\cos(nt)}{n} \quad \Leftarrow \quad w'(t) = \sin(nt).$$

La fonction w étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut à nouveau appliquer le théorème d'intégration par parties (en utilisant aussi u définie plus haut) afin d'obtenir

$$\begin{aligned} a_n(g) &= \frac{2\sqrt{x}}{\pi n}\left[-\frac{e^{-t\sqrt{x}}\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi - \frac{2\sqrt{x}}{\pi n}\int_0^\pi \frac{\sqrt{x}\, e^{-t\sqrt{x}}\cos(nt)}{n}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{\pi n^2}\big(1 - e^{-\pi\sqrt{x}}(-1)^n\big) - \frac{2x}{\pi n^2}\int_0^\pi e^{-t\sqrt{x}}\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{\pi n^2}\big(1 - (-1)^n\, e^{-\pi\sqrt{x}}\big) - \frac{x}{n^2}\, a_n(g). \end{aligned}$$

On en tire alors les coefficients recherchés :

$$\begin{aligned} &\Big(1 + \frac{x}{n^2}\Big)\, a_n(g) = \frac{2\sqrt{x}}{\pi n^2}\big(1 - (-1)^n\, e^{-\pi\sqrt{x}}\big) \\ \Leftrightarrow \quad & a_n(f) = \frac{2\sqrt{x}\big(1 - (-1)^n\, e^{-\pi\sqrt{x}}\big)}{\pi n^2}\,\frac{n^2}{n^2 + x} \\ \Leftrightarrow \quad & a_n(f) = \frac{2\sqrt{x}\big(1 - (-1)^n\, e^{-\pi\sqrt{x}}\big)}{\pi(n^2 + x)}. \end{aligned}$$

2.3 Calcul des coefficients de Fourier réels $\big(b_n(f)\big)_{n\geqslant 1}$

Puisque la fonction g est aussi paire, il vient également que $b_n(g) = 0$.

3 Détermination des séries de Fourier des deux fonctions

On rappelle que pour toute fonction φ, la série de Fourier réelle associée est donnée pour tout réel t par :

$$S_\varphi(t) = \frac{a_0(\varphi)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n(\varphi)\cos(nt) + b_n(\varphi)\sin(nt)\big).$$

Dans notre cas, on a alors pour tout réel t :

$$S_f(t) = \frac{e^{\pi\sqrt{x}} - 1}{\pi\sqrt{x}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sqrt{x}\big((-1)^n e^{\pi\sqrt{x}} - 1\big)}{\pi(n^2+x)}\cos(nt) \tag{1}$$

$$S_g(t) = \frac{1 - e^{-\pi\sqrt{x}}}{\pi\sqrt{x}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sqrt{x}\big(1 - (-1)^n e^{-\pi\sqrt{x}}\big)}{\pi(n^2+x)}\cos(nt) \tag{2}$$

4 Calcul de $S_f(0)$ et exhibation d'une première équation

f est une fonction définie sur $[0, \pi]$ comme étant paire. La symétrie de la fonction selon l'axe des ordonnées implique sa continuité en $x = 0$. Par suite, le théorème de Dirichlet nous permet d'affirmer que

$$S_f(0) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{2\,f(0)}{2} = f(0) = 1.$$

D'autre part, (1) nous donne l'égalité ci-dessous :

$$\begin{aligned} S_f(0) &= \frac{e^{\pi\sqrt{x}} - 1}{\pi\sqrt{x}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sqrt{x}\big((-1)^n e^{\pi\sqrt{x}} - 1\big)}{\pi(n^2+x)} \\ &= \frac{e^{\pi\sqrt{x}} - 1}{\pi\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}\,e^{\pi\sqrt{x}}}{\pi}\mathcal{L}(x) - \frac{2\sqrt{x}}{\pi}\mathcal{J}(x). \end{aligned}$$

Par égalisation de ces deux quantités trouvées, on obtient alors l'équation

$$\begin{aligned} &\frac{e^{\pi\sqrt{x}} - 1}{\pi\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}\,e^{\pi\sqrt{x}}}{\pi}\mathcal{L}(x) - \frac{2\sqrt{x}}{\pi}\mathcal{J}(x) = 1 \\ \Leftrightarrow\quad & 2x\,e^{\pi\sqrt{x}}\mathcal{L}(x) - 2x\mathcal{J}(x) = \pi\sqrt{x} - e^{\pi\sqrt{x}} + 1. \end{aligned} \tag{3}$$

5 Calcul de $S_g(0)$ et exhibation d'une seconde équation

g est aussi une fonction définie sur $[0, \pi]$ comme étant paire, et cela implique de même sa continuité en $x = 0$. Par application du théorème de Dirichlet, on trouve de la même manière que

$$S_g(0) = g(0) = 1.$$

De plus, (2) nous donne l'égalité ci-dessous :

$$\begin{aligned} S_g(0) &= \frac{1-e^{-\pi\sqrt{x}}}{\pi\sqrt{x}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sqrt{x}\big(1-(-1)^n\, e^{-\pi\sqrt{x}}\big)}{\pi(n^2+x)} \\ &= \frac{1-e^{-\pi\sqrt{x}}}{\pi\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}\, e^{-\pi\sqrt{x}}}{\pi}\mathcal{L}(x) + \frac{2\sqrt{x}}{\pi}\mathcal{J}(x). \end{aligned}$$

A nouveau, par égalisation des deux quantités trouvées, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1-e^{-\pi\sqrt{x}}}{\pi\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}\, e^{-\pi\sqrt{x}}}{\pi}\mathcal{L}(x) + \frac{2\sqrt{x}}{\pi}\mathcal{J}(x) = 1 \\ \Leftrightarrow\quad & -2x\, e^{-\pi\sqrt{x}}\mathcal{L}(x) + 2x\mathcal{J}(x) = \pi\sqrt{x} - 1 + e^{-\pi\sqrt{x}}. \end{aligned} \tag{4}$$

6 Résolution du système ainsi obtenu

Les équations (3) et (4) forment ainsi le système suivant :

$$\begin{cases} 2x\, e^{\pi\sqrt{x}}\mathcal{L}(x) - 2x\mathcal{J}(x) &= \pi\sqrt{x} - e^{\pi\sqrt{x}} + 1 \\ -2x\, e^{-\pi\sqrt{x}}\mathcal{L}(x) + 2x\mathcal{J}(x) &= \pi\sqrt{x} - 1 + e^{-\pi\sqrt{x}}. \end{cases}$$

On commence à additionner membre à membre ses équations pour pouvoir trouver $\mathcal{L}(x)$:

$$\begin{aligned} & 2x\,\mathcal{L}(x)(e^{\pi\sqrt{x}} - e^{-\pi\sqrt{x}}) = 2\pi\sqrt{x} - (e^{\pi\sqrt{x}} - e^{-\pi\sqrt{x}}) \\ \Leftrightarrow\quad & \mathcal{L}(x) = \frac{2\pi\sqrt{x} - (e^{\pi\sqrt{x}} - e^{-\pi\sqrt{x}})}{2x\,(e^{\pi\sqrt{x}} - e^{-\pi\sqrt{x}})} \\ \Leftrightarrow\quad & \mathcal{L}(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x}(e^{\pi\sqrt{x}} - e^{-\pi\sqrt{x}})} - \frac{1}{2x}. \end{aligned}$$

On remplace alors le résultat fraîchement obtenu dans l'une des deux équations du système. On choisira par exemple la première pour ne pas avoir trop d'exponentielles négatives. Par suite,

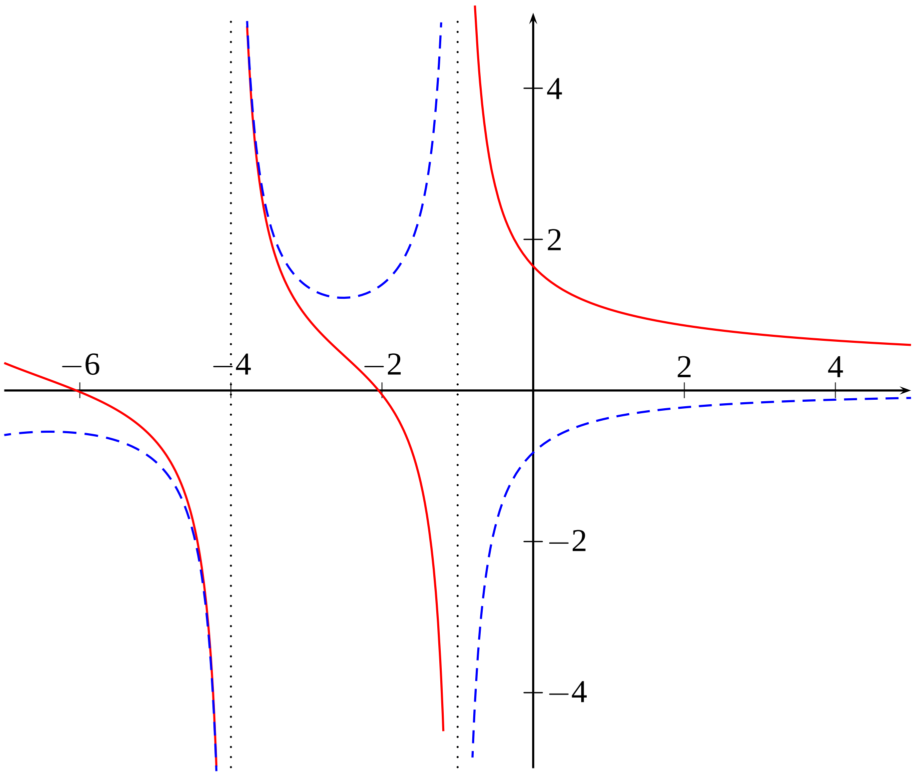
$$\begin{aligned} & 2x\, e^{\pi\sqrt{x}}\,\mathcal{L}(x) - 2x\,\mathcal{J}(x) = \pi\sqrt{x} - e^{\pi\sqrt{x}} + 1 \\ \Leftrightarrow\quad & 2x\,\mathcal{J}(x) = 2x\left(\frac{\pi}{\sqrt{x}(e^{\pi\sqrt{x}} - e^{-\pi\sqrt{x}})} - \frac{1}{2x}\right)e^{\pi\sqrt{x}} - (\pi\sqrt{x} - e^{\pi\sqrt{x}} + 1) \\ \Leftrightarrow\quad & \mathcal{J}(x) = \frac{\pi\, e^{\pi\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(e^{\pi\sqrt{x}} - e^{-\pi\sqrt{x}})} - \frac{e^{\pi\sqrt{x}}}{2x} - \frac{\pi\sqrt{x} - e^{\pi\sqrt{x}} + 1}{2x} \\ \Leftrightarrow\quad & \mathcal{J}(x) = \frac{\pi\, e^{\pi\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(e^{\pi\sqrt{x}} - e^{-\pi\sqrt{x}})} - \frac{\pi\sqrt{x}+1}{2x}. \end{aligned}$$

7 Conclusion et graphique

On en déduit la formule recherchée :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{S}, \qquad \mathcal{J}(x) = \frac{\pi\, e^{\pi\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(e^{\pi\sqrt{x}} - e^{-\pi\sqrt{x}})} - \frac{\pi\sqrt{x}+1}{2x}.$$

Et voici un graphique [3] représentant en rouge la fonction $\mathcal{J}$ et en bleu la fonction $\mathcal{L}$:



Attention à la lecture graphique : il est faux que $\mathcal{J}(-2) = 0$ par exemple. En effet, après calcul, on se rend compte que le réel proche de 2 tel que son image par $\mathcal{J}$ s'annule est très voisin de −2,045748516.

[3] : Pour la petite histoire, les courbes de fonction peuvent se tracer en LaTeX via la commande `psplot`, à condition d'écrire la fonction en notation polonaise inversée (par exemple, pour tracer $x \mapsto x^2+x-e^{\pi}$ entre 0 et 2, il faudra taper `\psplot{0}{2}{x 2 exp x add 2.7183 3.1416 exp sub}`). Or c'est Ghostscript qui effectue les calculs, et il ne sait pas calculer des racines de nombres négatifs. Il m'a fallu pour tracer ces courbes relier des centaines de points btenus par un autre logiciel. Celui que j'ai utilisé est Maple, puisqu'il génère directement les coordonnées de points à partir de la courbe qu'il sait tracer.