Résultat à démontrer…

Théorème

Soit le polynôme P_n défini pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ par

$$P_n(x) = \left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^p \binom{n-p}{p} x^{n-2p} \right) + \left(\sum_{q=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^q \binom{n-q-1}{q} x^{n-2q-1} \right),$$

où $[\,\cdot\,]$ désigne la fonction « partie entière », et $\alpha_n = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{2n+1}\right)$ un réel associé.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, α_n est la plus grande racine de P_n.

Commentaires

1. A première vue, on ne voit pas trop à quoi sert ce théorème, et ce qui est à démontrer (outre le résultat qui est donné, mais on s'intéresse plus particulièrement à son application…). En premier lieu, je dirai qu'un point préliminaire à démontrer serait de montrer que P_n admet n racines distinctes *réelles*.
2. Ensuite, l'idée de ce théorème est de voir que $\alpha_n \to 2$ lorsque $n \to \infty$. Pourquoi cette remarque ? Parce que si l'on arrive à déterminer d'une autre manière toutes les solutions de P_n (on peut prouver qu'elles sont toutes comprises entre -2 et 2), la plus grande sera égale à α_n.
3. En poursuivant un peu, on détermine alors une construction à la règle et au compas de α_n, et par extension, un polygone régulier à $2n+1$ côtés ! !

Exemples

On détermine que $P_2(x) = x^2 + x - 1$. On sait calculer les racines de ce polynôme qui sont

$$a = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad b = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi, $\alpha_2 = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, donc $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

On sait construire $\sqrt{5}$ à la règle et au compas (faire par exemple la spirale des racines carrées, ou construire un triangle rectangle dont les côtés hors hypothénuse mesurent 1 et 2), donc aussi $\cos(2\pi/5)$, et *a fortiori* le pentagone régulier (cf. fin de la leçon n° 17).

Pour autre exemple plus explicite,

$$P_1(x) = x + 1 \Rightarrow \alpha_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1 \Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

(ce que l'on sait vrai). Sachant construire $1/2$ à la règle et au compas, on sait aussi construire le triangle équilatéral…