SÉQUENCE IV

Fractions (partie 1)

1 Rappels : égalité de quotients

1 Simplification de quotient

« RÈGLE D'OR DES QUOTIENTS » (RAPPEL)

On ne change pas un quotient en multipliant (ou en divisant) son numérateur $\boxed{\text{ET}}$ son dénominateur par un même nombre non nul.

Autrement dit, pour tous nombres a, b et k (où b et k sont non nuls) :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}.$$

Exemple : Simplifie le quotient $\frac{42}{-140}$:

$$\frac{42}{-140} = \frac{21 \times 2}{-70 \times 2} = \frac{21}{-70} = \frac{3 \times 7}{-10 \times 7} = \frac{3}{-10}.$$

Exemple : Détermine le nombre x dans l'égalité $\frac{-1{,}2}{6} = \frac{x}{18}$:

Puisque $6 \times 3 = 18$, on a que $\frac{-1{,}2}{6} = \frac{-1{,}2 \times 3}{6 \times 3} = \frac{-3{,}6}{18}$. Donc $x = -3{,}6$!

2 Réduction de quotients au même dénominateur

En 5^{e}, on a déjà vu comment réduire deux fractions au même dénominateur lorsque l'un d'entre eux est déjà dans la table de l'autre. En 4^{e}, on pousse cette notion un peu plus loin.

Exemple : Réduis les quotients $\frac{2}{9}$ et $\frac{5}{12}$ au même dénominateur :

- Solution de facilité : on multiplie chaque fraction par le dénominateur de l'autre :

$$\frac{2}{9} = \frac{2 \times 12}{9 \times 12} = \frac{24}{108} \quad \text{et} \quad \frac{5}{12} = \frac{5 \times 9}{12 \times 9} = \frac{45}{108}.$$

- Solution réfléchie : on cherche quel est le plus petit multiple commun entre les deux dénominateurs (ici, c'est 36 qu'on trouve en commun en premier dans les tables de 9 et 12) :

$$\frac{2}{9} = \frac{2 \times 4}{9 \times 4} = \frac{8}{36} \quad \text{et} \quad \frac{5}{12} = \frac{5 \times 3}{12 \times 3} = \frac{15}{36}.$$

Exemple : Compare les quotients $\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{8}$:

Puisque $\frac{2}{7} = \frac{2\times 8}{7\times 8} = \frac{16}{56}$, $\frac{3}{8} = \frac{3\times 7}{8\times 7} = \frac{21}{56}$ et puisque $\frac{16}{56} < \frac{21}{56}$, on en déduit que $\frac{2}{7} < \frac{3}{8}$.

2 Comparer ou ranger des fractions

PROPRIÉTÉ

Pour comparer ou ranger plusieurs fractions, il faut d'abord qu'elles soient sur le même dénominateur (quitte à utiliser la règle d'or). Elles sont alors rangées dans le même ordre que leurs numérateurs.

Exemple 1 *(COMPARER DES FRACTIONS)* : Comparer les fractions suivantes :

- $\frac{3}{5}$ et $\frac{8}{5}$: $3 < 8$, donc $\frac{3}{5} < \frac{8}{5}$.
- $\frac{3}{8}$ et $\frac{1}{4}$: $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$, donc puisque $\frac{3}{8} > \frac{2}{8}$, on a : $\frac{3}{8} > \frac{1}{4}$.
- $\frac{5}{9}$ et $\frac{3}{4}$: $\frac{5}{9} = \frac{5\times 4}{9\times 4} = \frac{20}{36}$ et $\frac{3}{4} = \frac{3\times 9}{4\times 9} = \frac{27}{36}$, donc puisque $\frac{20}{36} < \frac{27}{36}$, on a : $\frac{5}{9} < \frac{3}{4}$.

Exemple 2 *(ORDONNER DES FRACTIONS)* : Range les fractions suivantes dans l'ordre croissant :

$$\frac{13}{20} \quad ; \quad \frac{7}{10} \quad ; \quad \frac{9}{4} \quad ; \quad \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}.$$

On met d'abord toutes les fractions sur 20 (car c'est le plus grand des dénominateurs proposés) :

$$\frac{7}{10} = \frac{7\times 2}{10\times 2} = \frac{14}{20} \quad ; \quad \frac{9}{4} = \frac{9\times 5}{4\times 5} = \frac{45}{20} \quad ; \quad \frac{2}{5} = \frac{2\times 4}{5\times 4} = \frac{8}{20} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} = \frac{1\times 10}{2\times 10} = \frac{10}{20}.$$

On peut maintenant les comparer plus facilement en ne regardant que les numérateurs ($8 < 10 < 13 < 14 < 45$), et on réécrit bien sûr le rangement en utilisant les fractions de l'énoncé :

$$\frac{8}{20} < \frac{10}{20} < \frac{13}{20} < \frac{14}{20} < \frac{45}{20} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{13}{20} < \frac{7}{10} < \frac{9}{4}.$$

3 Addition et soustraction

RÈGLE

Pour additionner (ou soustraire) des nombres en écriture fractionnaire ayant le même dénominateur, on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on garde le dénominateur commun.

Autrement dit, pour tous nombres a, b et D (où D est non nul) :

$$\frac{a}{D} + \frac{b}{D} = \frac{a+b}{D} \quad \text{et} \quad \frac{a}{D} - \frac{b}{D} = \frac{a-b}{D}.$$

Remarque

Si les nombres en écriture fractionnaire n'ont pas le même dénominateur, il faut les réduire au même dénominateur selon la méthode vue précédemment.

Exemple : Calcule l'expression suivante $A = -3 + \dfrac{13}{20} - \dfrac{1}{10}$:

$$A = \frac{-3}{1} + \frac{13}{20} - \frac{1}{10} = \frac{-3 \times 20}{1 \times 20} + \frac{13}{20} - \frac{1 \times 2}{10 \times 2} = \frac{-60}{20} + \frac{13}{20} - \frac{2}{20} = \frac{-60 + 13 - 2}{20} = -\frac{49}{20}.$$