SÉQUENCE IX

Puissances

1 Définitions générales

DÉFINITION (PUISSANCE POSITIVE)

Si n un entier positif et que x désigne un nombre quelconque, alors $\boxed{x^n}$, qui se lit « x puissance n » ou « x exposant n », est le nombre

$$x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs égaux à } x}.$$

Exemple : Calcule 11^2 ; 14^3 ; $(-5)^6$ et -8^4 :

$11^2 = 11 \times 11 = 121$ $\quad 14^3 = 14 \times 14 \times 14 = 2\,744$ $\quad (-5)^6 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 15\,625$ et $-8^4 = -8 \times 8 \times 8 \times 8 = -4\,096$.

Attention au dernier calcul, le "−" n'est pas concerné par la puissance !

DÉFINITION (PUISSANCE NÉGATIVE)

Si n est un entier positif et que x désigne un nombre quelconque, alors $\boxed{x^{-n}}$, qui se lit « x puissance moins n » ou « x exposant moins n », est le nombre

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs égaux à } x}}.$$

Exemple : Calcule 5^{-2} ; $(-5)^{-2}$ et -5^{-2} :

$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5 \times 5} = \frac{1}{25}$ $\quad (-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{(-5) \times (-5)} = \frac{1}{25}$ et $-5^{-2} = -\frac{1}{5^2} = -\frac{1}{5 \times 5} = -\frac{1}{25}$.

Attention au dernier calcul, le "−" n'est pas concerné par la puissance !

Remarque

Le fait qu'une puissance soit négative ne veut absolument pas dire que le résultat sera négatif !

2 Puissances de 10

DÉFINITION

On appelle **puissance de 10** le nombre 10 élevé à une puissance n, où n désigne un nombre entier (positif ou négatif). Lorsque n est positif, on a :

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{n \text{ facteurs égaux à } 10} = 1\underbrace{00\ldots00}_{n \text{ zéros}}.$$

Par convention (rappel de 5e) : $10^1 = 10$ et $10^0 = 1$.

DÉFINITION (PUISSANCE NÉGATIVE)

Soit n un nombre strictement positif. On appelle « 10 puissance moins n » le nombre noté 10^{-n} tel que :

$$10^{-n} = \underbrace{0{,}00\ldots0}_{n \text{ zéros}}1.$$

Exemples : On a ainsi $10^4 = 10\,000$; $10^9 = 1\,000\,000\,000$ mais aussi $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$ ou encore $10^{-10} = 0{,}000\,000\,000\,1$.

3 Les préfixes

Préfixes	giga	méga	kilo	–	milli	micro	nano
Symbole	G	M	k	–	m	μ	n
Signification	10^9	10^6	10^3	–	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

Remarque

En dessous du nano existent le “pico” (1 pm $= 10^{-12}$ m) et le “fento” (1 fm $= 10^{-15}$ m).Au-dessus du giga existe le “tera” (1 Tm $= 10^{12}$ m)

Exemples : Ce ne sont que des préfixes, il faut donc les associer à une unité :

- 1 kg de pommes de terre pèse donc 10^3 g $= 1\,000$ g.
- Un disque dur de 3 To (3 téraoctets) contient donc $3 \times 10^{12} = 3\,000\,000\,000\,000$ octets ou encore 3 000 Go (c'est l'équivalent de 638 films sur DVD).
- Une molécule d'eau mesure environ 0,1 nm $= 0{,}1 \times 10^{-9} = 0{,}000\,000\,01$ m $= 0{,}000\,01$ mm.

RÈGLE (AVEC "GLISSE-NOMBRE")

Pour multiplier un nombre décimal par 10^n, on déplace le nombre de n rangs vers la gauche.

Pour multiplier un nombre décimal par 10^{-n}, on décale le nombre de n rangs vers la droite (car $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n}$ donc cela revient à diviser par 10^n).

4 Écriture scientifique d'un nombre décimal

DÉFINITION

L'écriture scientifique d'un nombre est une écriture de la forme $a \times 10^n$ avec :

- **a un nombre décimal ne comportant qu'un seul chiffre non nul devant la virgule, positif ou négatif ;**
- **n un nombre entier relatif (donc positif ou négatif).**

Exemples : Les nombres $-4{,}78 \times 10^3$ et $2{,}159 \times 10^{-5}$ sont déjà en écritures scientifique.
Par contre, les nombres $45{,}9 \times 10^2$; $0{,}9 \times 10^5$ et $2{,}5 \times 3^{10}$ ne le sont pas.

MÉTHODE (trouver l'écriture scientifique d'un nombre)

1. **On écrit le nombre sans sa virgule et en supprimant les éventuels zéros devenus inutiles.**
2. **On place alors la virgule de sorte à n'avoir qu'un seul chiffre devant.**
3. **On compte combien il y a de rangs de différence entre la virgule du nombre de départ et celui de l'étape précédente afin d'obtenir la partie numérique de l'exposant.**
4. **Si la partie numérique du nombre de départ est inférieure à 1, alors on rajoute un "$-$" à l'exposant.**

Exemples : Donne l'écriture scientifique des nombres 4 591,23 ; $-23{,}5$ et 0,002 9 :

Au brouillon : $4\,591{,}23 \xrightarrow{❶} 459\,123 \xrightarrow{❷} 4{,}591{,}23 \xrightarrow{❸} 4{,}591\,23 \times 10^3 \xrightarrow{❹ : 4\,591{,}23>1} 4{,}591\,23 \times 10^3$

$-23{,}5 \xrightarrow{❶} -235 \xrightarrow{❷} -2{,}3{,}5 \xrightarrow{❸} -2{,}35 \times 10^1 \xrightarrow{❹ : 23{,}5>1} -2{,}35 \times 10^1$

$0{,}002\,9 \xrightarrow{❶} 29 \xrightarrow{❷} 0{,}002{,}9 \xrightarrow{❸} 2{,}9 \times 10^3 \xrightarrow{❹ : 0{,}002\,9<1} 2{,}9 \times 10^{-3}$

Au propre : $4\,591{,}23 = 4{,}591\,23 \times 10^3$; $-23{,}5 = -2{,}35 \times 10^1$ et $0{,}002\,9 = 2{,}9 \times 10^{-3}$.

RÈGLES (POUR ALLER PLUS LOIN...)

Soient m et n deux nombres entiers (= sans virgule apparente) relatifs (= positifs ou négatifs) quelconques. Alors

$$10^m \times 10^n = 10^{m+n} \quad ; \quad \frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n} \quad \text{et} \quad \left(10^m\right)^n = 10^{m\times n}.$$