SÉQUENCE XII

Parallélogrammes

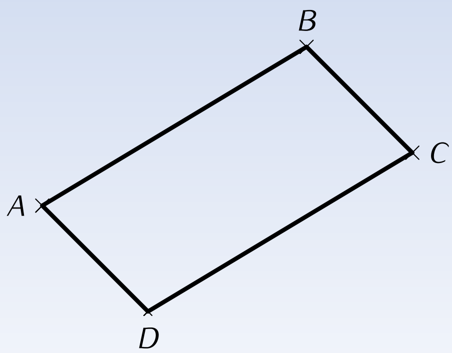
1 Aspect graphique

DÉFINITION

Un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles deux à deux.

Remarque

$ABCD$ est un parallélogramme, mais $AB\underline{DC}$ n'en est pas un. Attention à l'ordre des lettres !

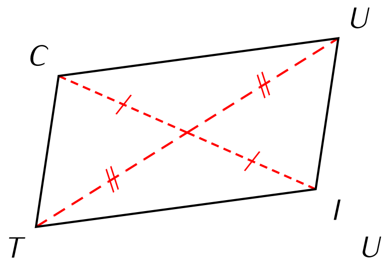


2 Reconnaître un parallélogramme

Toutes les caractérisations suivantes du parallélogramme sont aussi valables dans l'autre sens (voir exercices 3 et 4 p. 114 du cahier IParcours).

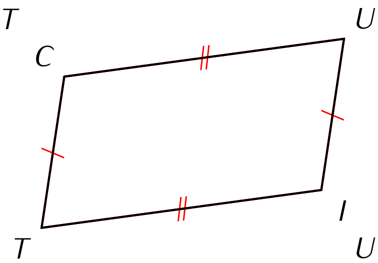
CARACTÉRISATION 1

Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.



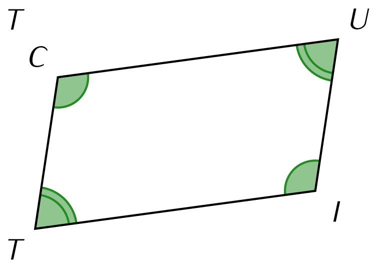
CARACTÉRISATION 2

Si un quadrilatère a ses côtés opposés de la même longueur, alors c'est un parallélogramme.



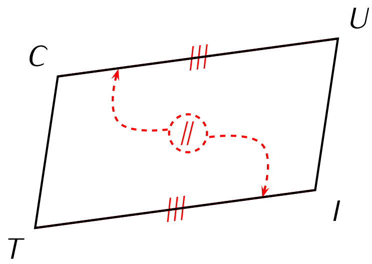
CARACTÉRISATION 3

Si un quadrilatère a ses angles opposés de la même mesure, alors c'est un parallélogramme.



CARACTÉRISATION 4

Si un quadrilatère a deux cotés opposés parallèles et *en même temps* de la même longueur, alors c'est un parallélogramme.

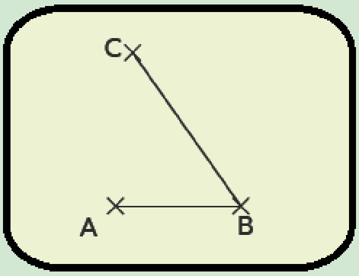


Remarque (rappel de 6e)

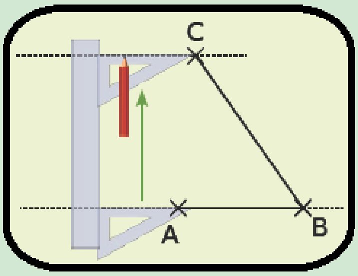
Les rectangles, les losanges et les carrés sont des parallélogrammes particuliers. Par exemple, un rectangle est un parallélogramme qu'on a "redressé" : on a transformé l'un de ses angles en angle droit !

3 Construire un parallélogramme

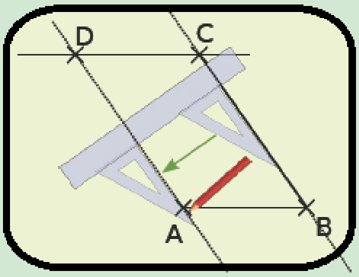
MÉTHODE (avec une règle et une équerre)



On trace les côtés $[AB]$ et $[BC]$ du parallélogramme. Par définition, on devra avoir (AB) // (CD) et (BC) // (AD).

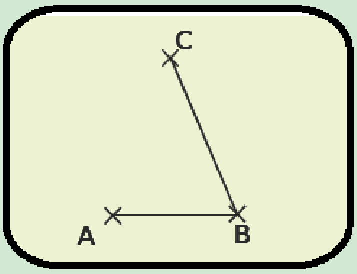


On trace donc la parallèle à (AB) passant par C.

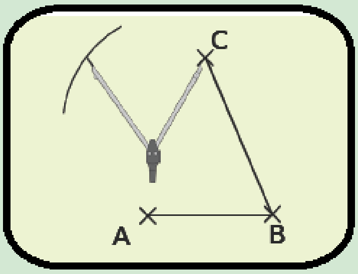


On trace aussi la parallèle à (BC) passant par A. Les deux droites tracées se coupent alors en D.

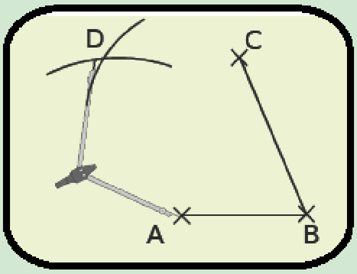
MÉTHODE (avec une règle et un compas)



On trace les côtés $[AB]$ et $[BC]$ du parallélogramme. La caractérisation 2 impose alors $AB = CD$ et $BC = AD$.



On reporte donc au compas la longueur AB à partir de C



On reporte ensuite au compas la longueur BC à partir de A. Les deux arcs de cercle se coupent alors en D.

4 La démonstration en mathématiques

Il faudra savoir les reconnaître, mais aussi savoir justifier pourquoi ce sont bien des parallélogrammes. On note **les hypothèses** (ce qui est dit dans l'énoncé, codé sur la figure ou prouvé précédemment), puis on rédige la démonstration (on part des hypothèses ; on justifie rapidement les déductions simples).

Pour les déductions *importantes*, on utilise le plan :

- **Je sais que** : … ← *noter les hypothèses nécessaires à la propriété*
- **J'utilise la propriété** : … ← *citer la propriété*
- **Je conclus que** : … ← *conclure*

Exemple : Une personne majeure a 18 ans ou plus. Pour passer le permis moto, un candidat doit être majeur. On pourrait reformuler ces deux phrases sous la forme de "propriétés" :

- ◇ P_1 : Si une personne a 18 ans ou plus, alors elle est majeure.
- ◇ P_2 : Si une personne est majeure, alors elle peut passer le permis moto.

Voici deux spécimens de carte d'identité. Cécile et Alex peuvent-ils passer leur épreuve du permis moto le 31 décembre 2024 ? Justifier la réponse.

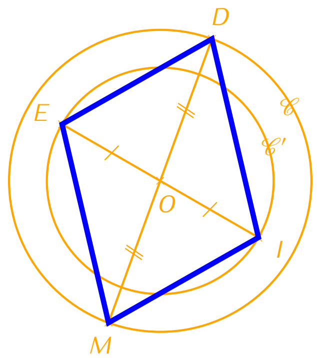
(la personne sur la photo n'est autre que l'auteur de ce cours…)

Solution : Cécile est née en 2010, elle aura donc $2\,024 - 2\,010 = 14$ ans en 2024. D'après la propriété P_1, elle sera donc mineure. La propriété P_2 ne peut donc pas s'appliquer : elle ne pourra pas encore passer l'épreuve du permis moto.
Alex est né en 2000, il aura donc $2\,024 - 2\,000 = 24$ ans en 2024 : il est donc majeur et peut passer l'épreuve du permis moto !

Exemple : $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux cercles de centre O. $[DM]$ est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$ et $[EI]$ est un diamètre du cercle $\mathscr{C}'$ (les deux diamètres ne doivent pas être superposés).

a) Fais une figure.
b) Démontre que $DEMI$ est un parallélogramme.

Solution : Voici une figure possible :



Je sais que $[DM]$ est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$ (donc que $DO = OM$) et une diagonale de $DEMI$. Je sais aussi que $[EI]$ est un diamètre du cercle $\mathscr{C}'$ (donc que $EO = OI$) et l'autre diagonale de $DEMI$.
J'utilise la propriété suivante : « Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme. »
Je conclus que le quadrilatère $DEMI$ est bien un parallélogramme.

5 Parallélogrammes particuliers (rappel de 6e)