SÉQUENCE XIII

Proportionnalité

1 Tableau de proportionnalité

DÉFINITIONS (RAPPELS DE 6E)

Deux grandeurs sont proportionnelles si on passe de l'une à l'autre en multipliant toujours par le même nombre, appelé coefficient de proportionnalité.

Exemples :

Nombre de SMS	1	2	5	8	10
Prix payé en €	0,15	0,30	0,75	1,20	1,50

On a : $0{,}15 \div 1 = 0{,}15$; $0{,}30 \div 2 = 0{,}15$; $0{,}75 \div 5 = 0{,}15$; $1{,}20 \div 8 = 0{,}15$ et $1{,}50 \div 10 = 0{,}15$.
Tous les quotients sont égaux à 0,15, donc le prix payé est proportionnel au nombre de SMS envoyés.

Le coefficient de proportionnalité est 0,15. Cela signifie qu'on paie 0,15 € pour 1 SMS envoyé.

Nombre de BD	3	5	11
Prix payé	7,50	9	18

On a : $7{,}50 \div 3 = 2{,}5$, mais $9 \div 5 = 1{,}8 \neq 2{,}5$!

Donc le prix n'est pas proportionnel au nombre de BD achetées : ce tableau n'est pas un tableau de proportionnalité.

2 Le « produit en croix »

« PRODUIT EN CROIX »

Dans un tableau de proportionnalité de quatre cases, s'il manque une valeur, on la calcule de la manière suivante :

Grandeur A	15	?
Grandeur B	5	25

❶ On surligne de deux couleurs différentes les nombres par diagonale.
❷ On multiplie les deux nombres de la diagonale « complète » (celle où les deux extrémités sont connues), et on divise par le nombre restant :

$$\frac{15 \times 25}{5} = 75.$$

Exemple : Lorsqu'on achète des cerises, leur prix (en €) est proportionnel à leur masse (en kg). Sachant que 4 kg coûtent 11,20 €, calculer le prix de 5 kg.

On utilise le **produit en croix :**

Masse (en kg)	4	5
Prix (en €)	11,20	x

On a : $x = \dfrac{5 \times 11{,}20}{4} = 14$ (on multiplie les nombres des cases en diagonale et on divise par celui qui reste).

Remarque

Toutes les autres techniques vues en primaire (coefficient de proportionnalité [$11{,}20 \div 4 = 2{,}8$, donc $x = 5 \times 2{,}8 = 14$], multiplication des lignes [$5 \div 4 = 1{,}25$, donc $x = 11{,}20 \times 1{,}25 = 14$]; passage par l'unité [$11{,}20 \div 4 = 2{,}8$, donc 1 kg coûte 2,80 €, donc 5 kg coûtent $5 \times 2{,}80 = 14$) fonctionnent encore, quand c'est possible ! L'avantage du produit en croix est qu'il fonctionne tout le temps !

3 Pourcentages

Un pourCENTage traduit une situation de proportionnalité sur un total de 100, et tout énoncé utilisant des pourcentages peut donc se traduire sous la forme d'un tableau de proportionnalité.

RÈGLE (APPLIQUER UN POURCENTAGE)

L'expression française « p% de x » se traduit mathématiquement par un tableau de proportionnalité. Par exemple, pour calculer 18% de 250 €, on procède de la manière suivante :

Quantité	18	?
Total	100	250

$$\frac{18 \times 250}{100} = 18 \times 2{,}5 = 45.$$

On peut aussi calculer l'expression française « p % de x » en calculant mathématiquement $\dfrac{p}{100} \times x$.

Exemple : Dans un collège de 360 élèves, 65 % font de l'anglais, 32,5 % de l'allemand et 2,5 % de l'espagnol en tant que LV2. Pour l'anglais, il s'agit de calculer « 65 % de 360 ». On fait donc un tableau de proportionnalité :

Élèves faisant allemand LV2	65	?
Nombre total d'élèves	100	360

$$\frac{65 \times 360}{100} = 234.$$

On en déduit que 234 élèves font de l'anglais en LV2.

EXERCICE : Calcule le nombre d'élèves faisant de l'allemand et de l'espagnol dans ce collège :

Solution : Allemand : 32,5% de 360 $= \dfrac{32{,}5 \times 360}{100} = 117$ élèves.

Espagnol : 2,5% de 360 $= \dfrac{2{,}5 \times 360}{100} = 9$ élèves (ou $360 - 234 - 117 = 9$).

RÈGLE (CALCULER UN POURCENTAGE)

Pour déterminer un pourcentage à partir d'une proportion, on procède de la manière suivante : par exemple, dans une entreprise de 585 salariés, 234 sont des femmes ; quel est le pourcentage de femmes dans cette entreprise ?

Nombre de femmes	?	234
Nombre total de salariés	100	585

$$\frac{234 \times 100}{585} = \frac{23\ 400}{585} = 40.$$

Il y a donc 40% de femmes dans cette entreprise.

Exemple : Dans une classe de 25 élèves, 24 ont un téléphone portable. Calcule le pourcentage d'élèves ayant un téléphone portable.

Solution :

a) On écrit ce qu'on cherche dans un tableau de proportionnalité (on cherche un pourcentage, c'est-à-dire un nombre sur un total de 100) :

Nombres d'élèves ayant un portable	?	
Nombre total d'élèves	100	

b) On complète avec les données de l'énoncé :

Nombres d'élèves ayant un portable	?	24
Nombre total d'élèves	100	25

c) On calcule grâce au produit en croix : $\frac{24 \times 100}{25} = 96$.

d) Conclusion : 96% des élèves de cette classe possèdent un téléphone portable.

4 Échelle

DÉFINITION

On appelle échelle d'un plan le coefficient de proportionnalité entre les longueurs sur le dessin et dans la réalité (elles doivent être exprimées dans la même unité, quelle qu'elle soit).
Elle est représentée par une fraction de numérateur 1, notée $1/x$ ou $1{:}x$.

Exemple : Sur la carte ci-contre, on peut lire que l'échelle est « 1/1 000 000 - 1 cm = 10 km ». L'échelle 1/1 000 000 signifie littéralement que « 1 cm sur le dessin représente 1 000 000 cm en réalité », donc 10 000 m ou encore 10 km. On peut donc commencer un tableau de proportionnalité :

Distance sur le dessin (cm)	1	39,9	59,2
Distance en réalité (km)	10	399	592

© Michelin

EXERCICE :

1. La distance à vol d'oiseau entre Paris et Strasbourg est de 399 km. Quelle distance les sépare sur ce plan ?

   Solution : $d = 1 \times 399 \div 10 = 39{,}9$.
   Sur ce plan, Paris et Strasbourg sont séparées de 39,9 cm.

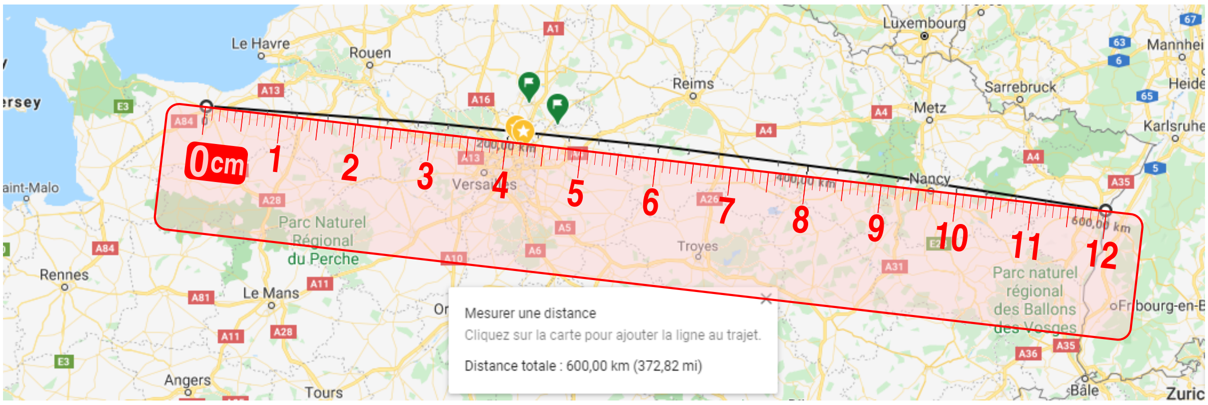
2. On mesure sur la carte 59,2 cm entre Brest et Bayone. Quelle distance réelle sépare ces deux villes ?

Solution : $r = 10 \times 59{,}2 \div 1 = 592$.
Dans la réalité, Brest et Bayonne sont séparées de 592 km.

3. La distance calculée à la question précédente est-elle la même que celle utilisée lors d'un trajet en voiture pour aller de Brest à Bayonne ?

   Solution : Non, car le trajet en voiture n'est tout simplement pas une ligne droite (829 km entre Brest et Bayonne par la route) !

■ **EXERCICE :** Sur ce plan issu de Google Maps, on a mesuré exactement 600 km entre le mémorial de Caen et la fac de droit de Strasbourg (en forme de balance). Quelle est l'échelle de ***ce*** plan ?



Solution : 12 cm sur le dessin représentent 600 km en réalité, soit 600 000 m ou encore 60 000 000 cm (puisque les deux grandeurs doivent être dans la même unité). Un tableau de proportionnalité va être utile ici :

Longueur (sur le dessin, en cm)	12	1
Longueur (réelle, en cm)	60 000 000	x

$$\Rightarrow x = \frac{1 \times 60\,000\,000}{12} = \frac{60\,000\,000}{12} = 5\,000\,000.$$

L'échelle sur ce plan est donc de 1/5 000 000, soit 5× plus petite que celle de la carte Michelin ci-dessus.

5 Ratio

DÉFINITIONS

- **Dire que deux nombres a et b sont dans le ratio 2:3 signifie que $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$.**
- **Dire que trois nombres a, b et c sont dans le ratio 2:3:7 signifie que $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{7}$.**

Exemples :

1. Lorsqu'on achète une télévision d'un ratio de 16:10 (format courant aujourd'hui) dont l'image fait 60 cm de long, on peut calculer grâce au produit en croix la hauteur h de l'image :

$$\frac{60}{16} = \frac{h}{10} \Rightarrow h = \frac{10 \times 60}{16} = \frac{600}{16} = \frac{37}{2} = 37{,}5 \text{ cm}.$$

2. Sabrina fait 35 cL de vinaigrette en utilisant le ratio 4:2:1 d'huile, vinaigre et moutarde. Quelle quantité de chaque ingrédient a-t-elle mis ?

   Cela signifie donc qu'il y aura 4 parts d'huile, 2 parts *équivalentes* de vinaigre et 1 part *équivalente* de moutarde, soit 7 parts en tout. Une part vaut donc $35 \div 7 = 5$ cL. Elle a donc utilisé $4 \times 5 = 20$ cL d'huile, $2 \times 5 = 10$ cL de vinaigre et 5 cL de moutarde.

   Vérification : $\frac{20}{4} = \frac{10}{2} = \frac{5}{1} = 5$. *Le ratio est respecté, et le total vaut bien* $20 + 10 + 5 = 35$ *cL.*

Remarques

- ◊ Dans la vérification, on voit bien le lien qu'il y a avec la proportionnalité puisqu'on a calculé 3 quotients différents et trouvé le même nombre : on pourrait donc mettre toutes les valeurs dans un tableau de proportionnalité, de coefficient 5.
- ◊ Visuellement, ce ratio de 4:2:1 pourrait se dessiner comme ceci :

❤ ❤ ❤ ❤ ✯ ✯ ❖
❤ ❤ ❤ ❤ ✯ ✯ ❖
❤ ❤ ❤ ❤ ✯ ✯ ❖
❤ ❤ ❤ ❤ ✯ ✯ ❖
❤ ❤ ❤ ❤ ✯ ✯ ❖

On voit le ratio sur chaque **ligne** : 4 ❤, 2 ✯ et 1 ❖, donc 4:2:1. Le nombre de lignes n'est pas important puisque c'est de toute façon proportionnel. On a choisi ici 5 lignes afin d'avoir 35 symboles en tout, chacun représentant alors 1 cL dans l'exemple précédent. En comptant, on retrouve les 20 ❤ (cL d'huile), 10 ✯ (cL de vinaigre) et 5 ❖ cL de moutarde).

- ◊ À retenir pour une application plus simple du produit en croix. Pour un ratio de deux nombres, l'égalité $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$ peut aussi s'écrire $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$.

■ **EXERCICE (cas réel) :** La télévision de M. Lenzen affiche une image de 88 cm sur 49,6 cm (40 pouces, soit 100 cm de diagonale, mais ce calcul ne sera vu que l'année prochaine…) À quel ratio d'image correspond à sa télé, sachant que les plus courants sont 4:3, 16:9 et 16:10 ?

Solution : La rapport longueur/hauteur donne $\frac{88}{49{,}6} \approx 1{,}77$.

- ◊ Le ratio 4:3 correspond à $\frac{4}{3} \approx 1{,}33$.
- ◊ Le ratio 16:9 correspond à $\frac{16}{9} \approx 1{,}77$.
- ◊ Le ratio 16:10 correspond à $\frac{16}{10} = 1{,}6$.

On peut raisonnablement penser que sa télé est de format 16:9.