SÉQUENCE VIII

Probabilités

1 Vocabulaire

DÉFINITIONS

On appelle expérience aléatoire une expérimentation ou un phénomène ayant plusieurs résultats possibles connus dès le départ, mais pour laquelle on ne peut jamais savoir à l'avance quel résultat se produira.

Ces différents résultats sont appelés les issues.

Exemples :

Le lancer d'un dé à 6 faces est une expérience aléatoire : on ne sait pas quel chiffre va donner le dé à chaque lancer, mais ce sera forcement 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6. Il y a donc six issues au lancé du dé classique.

Lancer une pièce de monnaie est une expérience aléatoire : on sait que ça va tomber sur pile ou face, mais on ne pourra jamais prévoir lequel des deux à chaque lancer. Il y a donc deux issues au jeu de pile ou face.

Tirer une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes est aussi une expérience aléatoire : on connaît les 32 cartes, mais on ne sait évidemment pas laquelle sera tirée. Il y a trente-deux issues.

DÉFINITIONS

On appelle événement une partie de l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.

L'événement est dit élémentaire s'il ne correspond qu'à une seule et unique issue.

Exemples :

Pour le lancé d'un dé,
- « obtenir le chiffre 1 » ; « obtenir le chiffre 2 » ; « obtenir le chiffre 3 » ; « obtenir le chiffre 4 » ; « obtenir le chiffre 5 » et « obtenir le chiffre 6 » sont les issues, donc aussi des événements élémentaires.
- « obtenir un nombre pair » ; « obtenir le chiffre 1 » ou encore « obtenir un multiple de 3 » sont des événements, réalisés respectivement par 3, 1 ou 2 issues, et on va bientôt pouvoir calculer les chances qu'ils se réalisent.

Pour le lancer d'une pièce de monnaie,
- « tomber sur pile » et « tomber sur face » sont les deux seules issues et des événements élémentaires.
- pour cette expérience aléatoire, on ne s'intéressera qu'à ces événements-là faute de pouvoir en formuler d'autres (« tomber sur la tranche » ?)

Pour le tirage d'une carte dans un jeu de 32 cartes,
- « tomber sur l'as de ♥ » ou « tomber sur le 9 de ♣ » sont des événements élémentaires (et des issues).
- par contre, « tomber sur une figure rouge » (une figure est un valet, une dame ou un roi) est un événement qui n'est pas élémentaire puisqu'il est réalisé par plusieurs cartes (V♥, D♥, R♥, V♦, D♦ et R♦).

2 Notion de probabilité

DÉFINITIONS

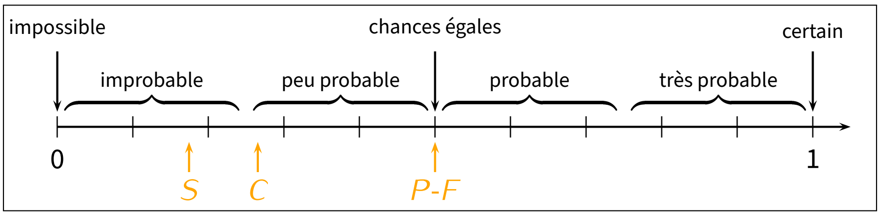
On appelle probabilité d'un événement la mesure des chances que cet événement se réalise. C'est un nombre compris entre 0 et 1 (ou entre 0 % et 100 %). Plus ce nombre s'approche de 1 (ou de 100 %), plus l'événement associé a de chances de se réaliser.
Mathématiquement, si A désigne un événement, alors on note $p(A)$ la probabilité qu'il se réalise.

Une échelle des probabilités est souvent utilisée dans la pratique : elle ressemble beaucoup à une demi-droite graduée sur laquelle on place les lettres des événements, afin de mieux "voir" leur probabilité.

Exemples :

- Lors du lancé du dé, si on veut tomber sur ⚅, on devine évidemment que cet événement est improbable puisqu'il y a cinq autres faces sur lesquelles on pourrait tomber.
- Lancer une pièce de monnaie ne propose que deux issues qui ont autant de chances de se réaliser l'une que l'autre.
- Soit C l'événement « tirer une carte ♥ » dans un jeu de 32 cartes. Puisqu'il y a quatre "couleurs" dans un jeu de cartes (♥, ♦, ♣ et ♠), cet événement serait plutôt peu probable.

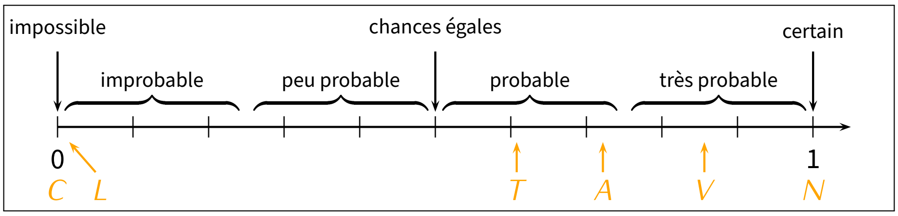
Si l'on note P l'événement « tomber sur pile », F l'événement « tomber sur face », S l'événement « tomber sur 6 » et C l'événement « tirer une carte ♥ » de ces exemples, alors le placement sur l'échelle de probabilités donne :



Remarque

On peut constater que les événements sont toujours écrits entre guillemets lorsqu'ils sont définis, et la lettre attribuée permet souvent de mieux retenir l'événement en question…

■ **EXERCICE :** Voici une échelle de probabilité :



Place dessus les lettres des événements suivants :

a) N : « Noël aura lieu le 25 décembre cette année. »
b) T : « Un élève aura un tee-shirt blanc à la rentrée de septembre. »
c) L : « Trouver la bonne combinaison au Loto. »
d) V : « On tombe sur une voyelle en lançant un dé sur lequel on met les lettres du mot "OISEAU". »
e) A : « Deux camarades d'une classe de 29 élèves ont leur anniversaire le même jour. »
f) C : « Un contrôle de maths a eu lieu le 30 février dernier. »

Solution : certain ; probable ; (très) improbable (1 chance sur 19 068 840) ; très probable ($\approx$ 83 %) ; probable (paradoxe des anniversaires pour 29 élèves : $\approx$ 68,09$\underline{7}$ %) ; impossible.

Calculs de probabilités

PROPRIÉTÉ

Lorsqu'on peut déterminer toutes les issues qui permettent de réaliser un événement A, alors sa probabilité est donnée par la formule :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{\text{nombre total d'issues}}$$

*Remarque : les probabilités seront donc des **fractions** de dénominateur 2 pour le lancé d'une pièce, 6 pour le lancé d'un dé, 32 pour un triage d'une carte dans un jeu de 32 cartes, …Puisqu'il s'agit de **fractions**, il faudra simplifier* si possible*!*

Exemple 1 : On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes (c'est donc bien une expérience aléatoire). Quelle est la probabilité des événements :

★ A : « la carte tirée est une dame » ?

$\Rightarrow$ L'événement A est réalisé quand on tire la dame de ♥, la dame de ♠, la dame de ♦ ou la dame de ♣. Cela fait donc 4 issues réalisant A sur un total de 32 :

Donc $p(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 12{,}5\,\%$.

★ B : « la carte tirée est une figure rouge » ?

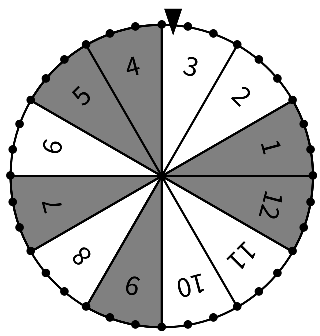
$\Rightarrow$ L'événement B est réalisé quand on tire le roi de ♥, la dame de ♥, le valet de ♥, le roi de ♦, la dame de ♦ ou le valet de ♦. Cela fait 6 issues réalisant B, toujours sur un total de 32 :

Donc $p(B) = \frac{6}{32} = \frac{3}{16} = 18{,}75\,\%$.

Exemple 2 : On lance un dé équilibré (= non truqué) à six faces et on considère l'événement C : « obtenir un nombre pair ». Quelle est la probabilité de l'événement C ?

$\Rightarrow$ L'événement C est réalisé lorsque l'on obtient la face 2, la face 4 ou la face 6, donc 3 issues réalisent C sur un total de 6. Donc $p(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\,\%$. Logique, la moitié des chiffres d'un dé sont pairs !

EXERCICE : On lance la roue de loterie ci-contre, et on s'intéresse soit à la couleur sur laquelle elle s'arrête, soit au nombre sur lequel elle s'arrête.



Calcule la probabilité en pourcentage des événements suivants (on arrondira à l'unité) :

a) A : « la roue s'arrête sur une case grise. »
b) B : « la roue s'arrête sur le 2. »
c) C : « la roue s'arrête sur un nombre à 2 chiffres. »
d) D : « la roue s'arrête sur une case blanche comportant un nombre impair. »

Solution : Avant de commencer, notons qu'il y a 12 cases, c'est le nombre total d'issues.

a) il y a 6 cases grises, donc $p(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 50\,\%$.
b) il n'y a qu'une seule case portant le numéro 2, donc $p(B) = \frac{1}{12} \approx 8\,\%$.
c) il y a 3 nombres à 2 chiffres (10, 11 et 12), donc $p(C) = \frac{3}{12}\frac{1}{4} = 25\,\%$.
d) il y a 2 cases blanches impaires (3 et 11), donc $p(D) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \approx 17\,\%$.