SÉQUENCE IX

Calcul littéral

1 Expressions littérales

DÉFINITIONS

Une expression littérale est une expression mathématique (un calcul) dans lequel apparaît au moins une lettre représentant un nombre inconnu.

Écrire un résultat « en fonction de x » consiste à écrire une expression littérale contenant la lettre x.

Exemples : Dès qu'une lettre se glisse dans un calcul, c'est une expression littérale :

- $A = 7 \times a + 9$
- $B = 5 \times b^2 - 3$
- $C = 7 \times x + 9 \times y - 10 \times x \times y$
- $D = 2 \times \pi \times R$ (formule du périmètre d'un disque)

DÉFINITIONS

On appelle carré d'un nombre le produit de ce nombre par lui-même : $x^2 = x \times x$.

On appelle cube d'un nombre le produit de ce nombre par lui-même trois fois : $x^3 = x \times x \times x$.

⚠ $\Longrightarrow$ $x^2 \neq x \times 2$ et $x^3 \neq x \times 3$!

Exemples : $5^2 = 5 \times 5 = 25$; $11^2 = 11 \times 11 = 121$; $3{,}5^2 = 3{,}5 \times 3{,}5 = 12{,}25$.
$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$; $11^3 = 11 \times 11 \times 11 = 1\,331$; $3{,}5^3 = 3{,}5 \times 3{,}5 \times 3{,}5 = 42{,}875$.

RÈGLE

Pour simplifier l'écriture d'une expression littérale, on peut supprimer le signe « $\times$ » devant une lettre ou une parenthèse (cas particuliers à connaître : $1 \times x = x \times 1 = x$ et $0 \times x = x \times 0 = 0$).

Exemples :

- $A = 8 \times a = 8a$
- $B = 7 \times b + 3 = 7b + 3$ $\longleftarrow$ on ne peut pas simplifier davantage (ODP)
- $C = c \times 10 - 6 = 10c - 6$ $\longleftarrow$ on ne peut pas simplifier davantage (ODP)
- $D = 2x + 3y^2 = 2 \times x + 3 \times y \times y$ $\longleftarrow$ il faut aussi savoir où se trouvent les multiplications cachées
- $E = 5 \times x + 7 \times (3 \times x + 9) = 5x + 7(3x + 9)$.

2 Substituer

1 Avec une expression littérale

DÉFINITION

Dans une expression littérale, faire une substitution consiste à remplacer chaque lettre par sa valeur pour pouvoir calculer cette expression.

MÉTHODE (calculer $A = x + 5$ pour $x = 10$)

On remplace le x par la valeur 10 :

$$\begin{aligned} A &= x + 5 \\ A &= 10 + 5. \\ A &= 15. \end{aligned}$$

Exemples :

a) Calcule $B = x + (-8)$ pour $x = 5$.
b) Calcule $C = x - 5$ pour $x = -10$.
c) Calcule $D = c + 11$ pour $c = -1$.
d) Calcule $E = 3 - d$ pour $d = 6$.

Solution : $B = 5 + (-8) = -3$; $C = -10 - 5 = -15$ (et non -5) ; $D = -1 + 11 = 10$ (et non -11) et $E = 3 - 6 = -3$.

RAPPEL DE LA RÈGLE PRÉCÉDENTE

En mathématiques, il est interdit que deux nombres (connus ou inconnus) se suivent sans aucun lien. Si le lien n'est pas visible, c'est qu'il s'agit forcément d'une multiplication cachée.
Exemples : $5x = 5 \times x$; $xy = x \times y$; $12a^2 = 12 \times a \times a$; ...

Exemples :

a) Calcule $G = 6x$ pour $x = 10$.
b) Calcule $H = 4x$ pour $x = -9$.
c) Calcule $I = 7g$ pour $g = 5$.
d) Calcule $J = 30h$ pour $h = -1$.

Solution : $G = 6 \times 10 = 60$ (et non 610 !) ; $H = 4 \times (-9) = -36$; $I = 7 \times 5 = 35$ et $J = 30 \times (-1) = -30$.

MÉTHODE (calculer $K = 5x^2 + 2x + 1$ pour $x = -4$)

$$\begin{aligned} K &= 5 \times x^2 + 2 \times x + 1 \longleftarrow \text{on rajoute les opérations (forcément } \times\text{) cachées} \\ K &= 5 \times (-4)^2 + 2 \times (-4) + 1 \longleftarrow \text{on remplace tous les } x \text{ par sa valeur} \\ K &= 73 \longleftarrow \text{on calcule avec la calculatrice} \end{aligned}$$

***Remarque importante* : quand on remplace x par un nombre négatif, il faut bien penser à mettre des parenthèses autour de ce nombre !**

Exemples :

a) Calcule $L = 9x + 15$ pour $x = 2$.
b) Calcule $M = 5x - 3$ pour $x = -4$.
c) Calcule $N = 4f + 7$ pour $f = -5$.
d) Calcule $O = 3g - 4$ pour $g = -3$.

Solution : $L = 9 \times 2 + 15 = 18 + 15 = 33$; $M = 5 \times (-4) - 3 = -20 - 3 = -23$; $N = 4 \times (-5) + 7 = -20 + 7 = -13$ (et non -27 !) et $O = 3 \times (-3) - 4 = -9 - 4 = -13$ (et non -5).

■ **EXERCICE :**

a) Calcule $P = 6x^2 + 7$ pour $x = -2$.
b) Calcule $Q = x^2 - 15$ pour $x = -4$.
c) Calcule $R = 2c^2 - 7$ pour $c = 6$.
d) Calcule $S = d^2 - 20$ pour $d = -8$.

Solution :

a) $P = 6 \times (-2)^2 + 7 = 6 \times 4 + 7 = 24 + 7 = 31$
b) $Q = (-4)^2 - 15 = 16 - 15 = 1$
c) $R = 2 \times 6^2 - 7 = 2 \times 36 - 7 = 72 - 7 = 65$
d) $S = (-8)^2 - 20 = 64 - 20 = 44$.

■ **EXERCICE :**

a) Calcule $T = 4x^2 + 3x + 1$ pour $x = 2$.
b) Calcule $U = 9x^2 - 2x + 7$ pour $x = -1$.
c) Calcule $V = 3g^2 + 5g - 11$ pour $g = -3$.
d) Calcule $W = h^2 - h + 3$ pour $h = 5$.

Solution :

a) $T = 4 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1 = 4 \times 4 + 6 + 1 = 16 + 6 + 1 = 23$.
b) $U = 9 \times (-1)^2 - 2 \times (-1) + 7 = 9 \times 1 + 2 + 7 = 9 + 2 + 7 = 18$.
c) $V = 3 \times (-3)^2 + 5 \times (-3) - 11 = 3 \times 9 - 15 - 11 = 27 - 15 - 11 = 1$.
d) $W = 5^2 - 5 + 3 = 25 - 5 + 3 = 23$ (et non $\cancel{5^2 - 5 + 3 = 25} - 8 = 13$: grosse erreur de priorité !)

2 Avec un programme de calculs

MÉTHODE (traduire un programme de calculs en expression littérale)

- ⋆ **Choisis un nombre.**
- ⋆ **Multiplie-le par 7.**
- ⋆ **Ajoute 8.**
- ⋆ **Écris le résultat.**

Réponse : **a) On choisit x** $\longrightarrow$ **on choisit une lettre, en général x**

b) $7 \times x = 7x$
c) $7x + 8$ ($\neq 15x$) $\Big\}$ $\longrightarrow$ **on doit tenir compte des techniques de calcul littéral**

d) Le résultat est $7x + 8$. $\longrightarrow$ **on écrit le résultat**

Exemple : En t'aidant de la méthode précédente, traduis à l'aide d'une expression littérale ces deux programmes de calculs :

Programme n° 1

- ◊ Choisis un nombre.
- ◊ Multiplie-le par 5.
- ◊ Soustraie 4 à ce produit.
- ◊ Écris le résultat.

Programme n° 2

- ☐ Choisis un nombre.
- ☐ Élève-le au carré.
- ☐ Multiplie par 4.
- ☐ Soustraie 10.
- ☐ Écris le résultat.

Solution : Programme n° 1 : $5x - 4$; Programme n° 2 : $4x^2 - 10$.

3 Tests d'égalité

DÉFINITIONS

Une égalité est une expression mathématique (comportant des lettres ou non) contenant le symbole « $=$ ».

La tester consiste à déterminer si elle est vraie ou fausse. Les membres de gauche et droite sont les noms donnés aux deux côtés de l'égalité.

RÈGLE

Pour tester une égalité pour une certaine valeur de x, on calcule chaque membre séparément (s'il y a un calcul) en remplaçant chaque lettre x par sa valeur.

Si les résultats sont identiques, alors cette valeur de x est solution. Dans le cas contraire, x n'est pas solution et il faut recommencer le test d'égalité avec une autre valeur de x.

Exemples :

a) Le nombre 6 est-il solution de l'équation $4x - 2 = 44$? et de l'équation $x^2 - 8 = 28$?
b) Le nombre 2 est-il solution de l'équation $4x - 1 = 3x + 1$?
c) Le nombre 3 est-il solution de l'équation $5x - 4 = x^2 + 2$?

Solution :

a) Non car $4x - 2 = 4 \times x - 2 = 4 \times 6 - 2 = 24 - 2 = 22 \neq 44$ / oui car $x^2 - 8 = 6^2 - 8 = 36 - 8 = 28$.
b) Oui car $4x - 1 = 4 \times x - 1 = 4 \times 2 - 1 = 8 - 1 = 7$ et $3x + 1 = 3 \times x + 1 = 3 \times 2 + 1 = 6 + 1 = 7$ aussi.
c) Oui car $5x - 4 = 5 \times x - 4 = 5 \times 3 - 4 = 15 - 4 = 11$ et $x^2 + 2 = 3^2 + 2 = 9 + 2 = 11$ aussi.

4 La distributivité

1 Appliquer la distributivité

MÉTHODE (développer pour le calcul mental)

Calculer mentalement 24×101 : on trouve 2424 ! Quelle méthode permet d'obtenir ce résultat rapidement ?

$$24 \times 101 = 24 \times (100 + 1) = 24 \times 100 + 24 \times 1 = 2\,400 + 24 = 2\,424.$$

MÉTHODE (développer pour le calcul mental, SUITE)

Astuces :
$101 = 100 + 1$
$99 = 100 - 1$
$12 = 10 + 2$
$105 = 100 + 5$

On connaît des règles de calcul mental pour multiplier par 10, par 100, par 1 000, par 2, par 4, par 5, ...

On décompose donc un des deux facteurs en utilisant une astuce ci-contre !

MÉTHODE (factoriser pour le calcul mental calcul mental)

Calculer astucieusement : $131 \times 13 + 131 \times 87$ **:**

$$\underline{131} \times 13 + \underline{131} \times 87 = \underline{131} \times (13 + 87) = 131 \times 100 = 13\,100.$$

Astuce : on reconnaît un <u>facteur commun</u> pour appliquer la distributivité.

2 Réduire une expression

MÉTHODE (Réduire une expression)

Réduire l'expression suivante : $A = 4x + 3x$ **:**

$$A = 4x + 3x = 4 \times \underline{x} + 3 \times \underline{x} = \underline{x} \times (4 + 3) = x \times 7 = 7 \times x = 7x.$$

5 Autre utilisation du calcul littéral : démontrer

Dans les chapitres de nombres, les schémas DPC (ou « je sais que — j'utilise — j'en déduis que ») sont inutiles. On pourra quand même demander de démontrer si une égalité est vraie ou fausse :

- Si elle est fausse, il suffit de trouver une valeur pour laquelle ça ne fonctionne pas. On parle de contre-exemple.
- Si elle est vraie, on ne peut pas se contenter de le faire sur plusieurs exemples, il faut le démontrer ***pour tous les nombres*** en même temps !

Exemples :

- Tout multiple de 3 s'écrit sous la forme $3n$, où n désigne n'importe quel nombre.
- Un nombre pair est divisible par 2, par conséquent il s'écrit sous la forme $2n$, où n désigne n'importe quel nombre.
- Par conséquent, tout nombre impair s'écrira forcément sous la forme $2n + 1$, où n désigne n'importe quel nombre. En effet, lorsqu'on ajoute 1 à un nombre pair, on passe à un nombre impair !

EXERCICE :

a) Montrer que la somme de deux nombres consécutifs donne toujours un nombre impair.
b) Montrer que la somme de trois nombres consécutifs est toujours un multiple de 3.
c) Est-qu'un nombre qui se termine par 3 est forcément divisible par 3 ? Justifie.

<u>Solution</u> :

a) Soit n le premier des deux nombres. Alors $n + (n + 1) = n + n + 1 = 2n + 1$ qui est forcément impair (puisque $2n$ est un multiple de 2).
b) Soit n le *nombre du milieu*. Alors $(n - 1) + n + (n + 1) = n \cancel{-1} + n + n \cancel{+1} = 3n$, qui est multiple de 3.
c) Faux, car 13 se termine par un 3, mais n'est pas divisible par 3.