PROBLÈME GÉOMÉTRIQUE :

LE « THÉORÈME DE COCYCLICITÉ »

Tout au long de ce problème, on demande de faire les constructions sur la feuille séparée jointe au sujet. Le soin apporté à la réalisation de la figure et à la qualité de la copie sera noté en conséquence… Les angles seront calculés avec 3 chiffres après la virgule. Les angles calculés aux questions 3, 4.(d) et 5.(b) seront mis en évidence sur la figure. Ne pas oublier de lire les indications situées en bas de pages 1 et 2.

1. On place trois points : A et B, tels que le segment $[AB]$ ait pour longueur 6 cm, et son milieu I. Construire la médiane $\mathscr{D}$ du segment $[AB]$. Construire ensuite le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de diamètre 8 cm qui coupe alors la droite $\mathscr{D}$ en deux points que l'on appelle C et D (on souhaite que le point C se situe en-dessous de la droite (AB)). Démontrer que le quadrilatère $ACBD$ est un losange.

2. Tracer le cercle $\mathscr{C}'$ de centre C et de rayon AC, et montrer que le point B appartient à ce cercle $\mathscr{C}'$.

3. **Etude d'un premier triangle :**
   La perpendiculaire à la droite (AB) passant par A coupe le cercle $\mathscr{C}'$ en un autre point que A, on le note E. Justifier la nature du triangle AEB. En déduire la longueur du segment $[BE]$, puis la mesure de l'angle $\widehat{AEB}$, noté α.

4. **Etude d'un second triangle :**
   (a) Dans le triangle AEB, tracer la hauteur issue de A. Elle coupe le côté opposé $[BE]$ en un point noté F et le cercle $\mathscr{C}'$ en un autre point que A, noté G. Quelle est la nature des triangles AFB et GFB ? Montrer qu'ils sont isométriques.

   (b) On se place dans le triangle AFB. On note $h = AF$ et $a = BF$. Ecrire la relation de Pythagore dans ce triangle, et en déduire une expression de h^2 en fonction de a^2.

   (c) On se place maintenant dans le triangle AFE rectangle en F. Quelle est, en fonction de a, la longueur du segment $[FE]$? Appliquer le théorème de Pythagore dans ce triangle, et modifier l'équation ainsi obtenue pour exprimer h^2 en fonction de a^2 et de a.

   (d) En déduire [1] les longueurs a, puis h.

   (e) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AGB}$ (on pourra utiliser la question 4.(a)). Que constate-t-on par rapport à l'angle α calculé à la question 3 ?

5. **Etude d'un troisième triangle :**
   (a) La droite $\mathscr{D}$ coupe le cercle $\mathscr{C}'$ en deux points. L'un d'eux se situe en-dessous de la droite (AB), on le note H. Montrer que le triangle AHB est isocèle en H.

[1] *Indication* : Dans le cas général, si $x = y$ et $x = z$, alors $y = z$. Appliquer cela aux égalités trouvées en 4.(b) et 4.(c).

(b) Quelle est la longueur du segment $[IH]$? En déduire la mesure de l'angle $\widehat{IAH}$, puis celle de l'angle $\widehat{AHB}$. Que constate-t-on par rapport aux deux angles calculés ci-dessus (questions 3 et 4.(d)) ? ?

6. **Question bonus :** Pourrait-on déduire de ce cas particulier un « théorème » fonctionnant dans le cas général ? Montrer que les triangles AEB et ICB sont semblables, et calculer la mesure de l'angle $\widehat{ICB}$. En déduire une expression de l'angle $\widehat{ACB}$ en fonction de α. Est-ce un hasard ? ?

7. Tracer avec le plus de précision possible les deux uniques droites qui soient tangentes aux deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. On les note respectivement $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$. Elles se coupent alors en un point O. Justifier le fait que O soit sur la droite $\mathscr{D}$ et déterminer graphiquement [2] la longueur de segment $[OD]$.

   Pour cette question, on rappelle que toute tangente à un point A d'un cercle de centre O vérifie deux propriétés intéressantes : c'est une droite perpendiculaire au rayon $[OA]$ du cercle, et elle ne coupe le cercle qu'en l'unique point A, et pas d'autre.

8. Déterminer la longueur du segment $[OD]$ par le calcul [3].

La figure à compléter se trouve page suivante.

[2] *Indication* : C'est un nombre entier.

[3] *Indication* : Poser $d = OI$ (on a alors $OC = d + 4$), puis utiliser le théorème de Thalès, avec les droites $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{D}$ sécantes en O, ainsi que deux droites astucieusement choisies, parallèles entre elles et perpendiculaires toutes les deux à $\mathscr{T}_1$.