LEÇON N° 23 :

Droites et plans dans l'espace. Positions relatives ; plans contenant une droite donnée.

Pré-requis :
– *Espaces vectoriels de dimension* 2 *et* 3*, propriétés ;*
– *Vecteurs et colinéarité de deux vecteurs ;*
– *Résolution de systèmes linéaires.*

Soient $\mathscr{E}$ l'espace affine de dimension 3 et E l'espace vectoriel associé. $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = \mathscr{R}$.

23.1 Droites et plans de l'espace

23.1.1 Définition

Définition 1 : On appelle *droite* toute partie $\mathscr{D}$ de $\mathscr{E}$ telle qu'il existe $A \in \mathscr{E}$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$ vérifiant

$$\mathscr{D} = \{M \in \mathscr{E} \mid \exists\, \lambda \in \mathbb{R}\ :\ \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}\}.$$

On note alors $\mathscr{D} = \mathscr{D}(A, \vec{u})$ et $\vec{u}$ est appelé *vecteur directeur* de $\mathscr{D}$.

`Remarque 1` : Une droite est déterminée par la donnée de deux points distincts A et B.

Définition 2 : On appelle *plan* toute partie $\mathscr{P} \subset \mathscr{E}$ telle qu'il existe $A \in \mathscr{E}$ et deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ linéairement indépendants vérifiant

$$\mathscr{P} = \{M \in \mathscr{E} \mid \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\ :\ \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}\}.$$

On note alors $\mathscr{P} = \mathscr{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ et $\vec{u}, \vec{v}$ sont appelés *vecteurs directeurs* de $\mathscr{P}$.

`Remarque 2` : Un plan est déterminé par la donnée de trois points non alignés, ou d'après la remarque précédente, par un point A et une droite ne contenant pas A.

23.1.2 Représentation paramétrique

Soient $\mathscr{D}(A, \vec{u})$ et $\mathscr{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec $A(a, b, c), \vec{u}(\alpha, \beta, \gamma), \vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$. Alors :

$$\begin{array}{ll} & M(x,y,z)\in\mathscr{D} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{AM},\vec{u} \text{ colinéaires} \\ \Leftrightarrow & \exists\,\lambda\in\mathbb{R}\mid \overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u} \\ \Leftrightarrow & \exists\,\lambda\in\mathbb{R}\mid \begin{cases} x=a+\lambda\alpha \\ y=b+\lambda\beta \\ z=c+\lambda\gamma. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & M(x,y,z)\in\mathscr{P} \\ \Leftrightarrow & (\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v}) \text{ liée} \\ \Leftrightarrow & \exists\,\lambda,\mu\in\mathbb{R}\mid \overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v} \\ \Leftrightarrow & \exists\,\lambda,\mu\in\mathbb{R}\mid \begin{cases} x=a+\lambda\alpha+\mu\alpha' \\ y=b+\lambda\beta+\mu\beta' \\ z=c+\lambda\gamma+\mu\gamma'. \end{cases} \end{array}$$

Ce système est appelé *représentation paramétrique de* $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{P}$).

23.1.3 Équations cartésiennes d'un plan

Théorème 1 : Soit $\mathscr{P}(A,\vec{u},\vec{v})$ un plan avec $A(a,b,c),\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma),\vec{v}(\alpha',\beta',\gamma')$. Il existe $(p,q,r,s)\in\mathbb{R}^4$ avec $(p,q,r)\neq(0,0,0)$ tel que

$$M(x,y,z)\in\mathscr{P}\quad\Leftrightarrow\quad px+qy+rz+s=0.$$

Réciproquement, si $(p,q,r,s)\in\mathbb{R}^4$ avec $(p,q,r)\neq(0,0,0)$, alors $\{M(x,y,z)\in\mathscr{E}\mid px+qy+rz+s=0\}$ est un plan de $\mathscr{E}$.

démonstration *: Notons déjà, par exemple, que $\vec{u},\vec{v}$ non colinéaires entraîne $\alpha'\beta-\alpha\beta'\neq 0$. De plus, il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que :*

$$\begin{array}{rll} M\in\mathscr{P} & \overset{23.1.2}{\Leftrightarrow} & \begin{cases} x-a=\lambda\alpha+\mu\alpha' & (L_1) \\ y-b=\lambda\beta+\mu\beta' & (L_2) \\ z-c=\lambda\gamma+\mu\gamma' & (L_3) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} \beta(x-a)-\alpha(y-b)=\mu(\alpha'\beta-\alpha\beta') & (L_1') \\ \gamma(y-b)-\beta(z-c)=\mu(\beta'\gamma-\beta\gamma') & (L_2') \end{cases} \quad \left(\textit{avec}\ \begin{array}{l} L_1'=\beta L_1-\alpha L_2 \\ L_2'=\gamma L_2-\beta L_3 \end{array}\right) \\ & \Leftrightarrow & (\beta'\gamma-\beta\gamma')\big(\beta(x-a)-\alpha(y-b)\big)-(\alpha'\beta-\alpha\beta')\big(\gamma(y-b)-\beta(z-c)\big)=0 \\ & & (\textit{en faisant } (\beta'\gamma-\beta\gamma')L_1'-(\alpha'\beta-\alpha\beta')L_2') \\ & \Leftrightarrow & px+qy+rz+s=0, \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} p &=& \beta(\beta'\gamma-\beta\gamma'), \\ q &=& \gamma(\alpha'\beta-\alpha\beta')-\alpha(\beta'\gamma-\beta\gamma'), \\ r &=& \beta(\alpha\beta'-\alpha'\beta) \textit{ et} \\ s &=& (\beta'\gamma-\beta\gamma')(b\alpha-a\beta)-(\alpha'\beta-\alpha\beta')(c\beta-b\gamma). \end{array}$$

De plus, $(p,q,r)\neq(0,0,0)$. Pour la réciproque, on pose p,q,r,s comme trouvé (et qui vérifient alors $(p,q,r)\neq(0,0,0)$), et on remonte les lignes jusqu'à $M\in\mathscr{P}$. ■

Définition 3 : L'équation $px+qy+rz+s=0$ est appelée *équation cartésienne* de $\mathscr{P}$.

`Remarque 3` : Nous verrons plus loin (23.2.1) que l'équation cartésienne d'un plan n'est pas unique.

23.2 Positions relatives…

23.2.1 … de deux plans

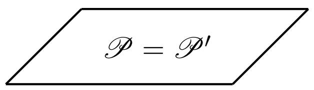
Proposition 1 : Soient $\mathscr{P} : px + qy + rz + s = 0$ et $\mathscr{P}' : p'x + q'y + r'z + s' = 0$ deux plans de $\mathscr{E}$. Alors :

(i) $\mathscr{P} = \mathscr{P} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{R}^* \mid (p', q', r', s') = k(p, q, r, s)\,;$

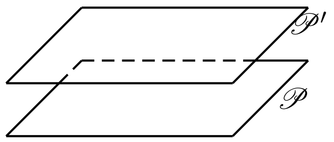
(ii) $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{R}^* \mid (p', q', r') = k(p, q, r)$ **et** $s' \neq ks\,;$

(iii) $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \mathscr{D} \quad \Leftrightarrow \quad (p', q', r')$ **et** (p, q, r) **non proportionnels.**

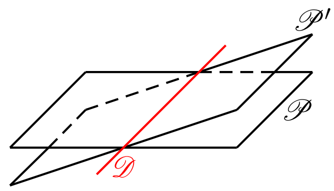
Voici les illustrations correspondants à chacun de ces trois cas :



(i) $\mathscr{P} = \mathscr{P}'$



(ii) $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \varnothing$



(iii) $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \mathscr{D}$

***démonstration** : On a déjà que*

$$M(x, y, z) \in \mathscr{P} \cap \mathscr{P}' \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} px + qy + rz + s = 0 \\ p'x + q'y + r'z + s' = 0 \end{array} \right. \quad (S)$$

Supposons $p \neq 0$. Alors (S) se transforme facilement en

$$(S') \ : \ \left\{ \begin{array}{l} px + qy + rz + s = 0 \\ \gamma y + \beta z + \delta = 0, \end{array} \right.$$

avec $\beta = rp' - r'p$, $\gamma = pq' - p'q$ et $\delta = ps' - p's$.

Supposons $\beta = \gamma = 0$, *et posons $p' = kp$. Alors*

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r'p = rp' \\ q'p = qp' \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r' = kr \\ q' = kq \end{array} \right. \Leftrightarrow (p', q', r') = k(p, q, r).$$

Supposons $\beta = \gamma = \delta = 0$: *alors on montre de manière analogue que*

$$(p', q', r', s') = k(p, q, r, s).$$

Distinguons alors plusieurs cas, s'aidant de ces deux résultats :

- Si $\gamma \neq 0$ *(par exemple, ou $\beta \neq 0$), alors (S') (et donc (S)) admet une solution donnée par*

$$z = z, \quad y = \frac{sp' - s'p}{\gamma} + \frac{rp' - r'p}{\gamma}\, z \quad \text{et} \quad x = \frac{qs' - q's}{\gamma} + \frac{qr' - q'r}{\gamma}\, z,$$

donc $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$ est la droite passant par le point

$$\left(\frac{qs' - q's}{\gamma}, \frac{sp' - s'p}{\gamma}, 0 \right)$$

et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, où $\alpha = qr' - q'r$ et β, γ déjà définies.

- **Si $\beta = \gamma = 0$ et $\delta \neq 0$,** *alors (p', q', r') et (p, q, r) sont proportionnels, mais pas (p', q', r', s') et (p, q, r, s), donc il existe λ, μ distincts et non nuls tels que $(p', q', r', s') = (\lambda p, \lambda q, \lambda r, \mu s)$. Dans le système (S), on trouve alors que*

$$\begin{cases} \lambda s = 0 \\ \mu s = 0 \end{cases} \overset{s \neq 0}{\Rightarrow} \lambda = \mu = 0,$$

ce qui est impossible. Par ailleurs, si $s = 0$, on aura automatiquement que $s' = \mu s = 0$, contredisant le fait que (p', q', r', s') et (p, q, r, s) ne sont pas proportionnels. On en déduit alors que (S) n'admet pas de solution, c'est-à-dire $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \varnothing$.

- **Si $\beta = \gamma = \delta = 0$,** *alors (p', q', r', s') et (p, q, r, s) sont proportionnels, de sorte que (S) se réduise à la seule équation $px + qy + rz + s = 0$, et on en déduit que $\mathscr{P} = \mathscr{P}'$.*

Puisque tous les cas sont envisagés, ces implications sont des équivalences et le résultat annoncé s'en déduit. ■

Définition 4 : Dans le cas (ii), on dit que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont *strictement parallèles*. Pour (i) et (ii), on note $\mathscr{P} \parallel \mathscr{P}'$.

`Remarque 4` : Le cas (i) montre que l'équation cartésienne d'un plan n'est unique qu'à coefficient mutiplicatif près.

23.2.2 … d'une droite et d'un plan

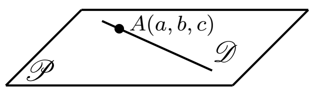
Proposition 2 : Soient $\mathscr{P} : px + qy + rz + s = 0$ un plan et $\mathscr{D}$ la droite dont la représentation paramétrique est $x = a + \lambda\alpha$, $y = b + \lambda\beta$ et $z = c + \lambda\gamma$. Alors

(i) $\mathscr{D} \subset \mathscr{P} \quad \Leftrightarrow \quad p\alpha + q\beta + r\gamma = 0$ et $pa + qb + rc + s = 0$;

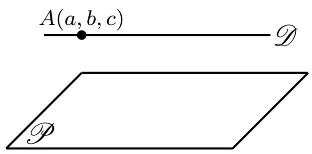
(ii) $\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad p\alpha + q\beta + r\gamma = 0$ et $pa + qb + rc + s \neq 0$;

(iii) $\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \{I\} \quad \Leftrightarrow \quad p\alpha + q\beta + r\gamma \neq 0$.

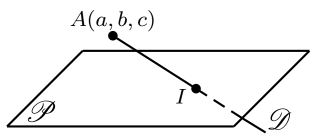
Voici les illustrations correspondants à chacun de ces trois cas :



(i) $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}'$



(ii) $\mathscr{D} \cap \mathscr{P}' = \varnothing$



(iii) $\mathscr{D} \cap \mathscr{P}' = \{I\}$

démonstration *: On a déjà que*

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \mathscr{D} \cap \mathscr{P} \quad &\Leftrightarrow \quad p(a + \lambda\alpha) + q(b + \lambda\beta) + r(c + \lambda\gamma) + s = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda(p\alpha + q\beta + r\gamma) + (pa + qb + rc + s) = 0. \end{aligned}$$

De plus, notons que

$$p\alpha + q\beta + r\gamma = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}(\alpha, \beta, \gamma) \in \overrightarrow{\mathscr{P}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{D} \parallel \mathscr{P}.$$

(i) $\mathscr{D} \subset \mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{D} \parallel \mathscr{P}$ *et* $(a,b,c)\ (\in \mathscr{D}) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow p\alpha + q\beta + r\gamma = 0$ *et* $pa + qb + rc + s = 0$.

(ii) $\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \varnothing \Leftrightarrow \mathscr{D} \parallel \mathscr{P}$ *et* $(a,b,c) \notin \mathscr{P} \Leftrightarrow p\alpha + q\beta + r\gamma = 0$ *et* $pa + qb + rc + s \neq 0$.

(iii) $\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \{I\} \Leftrightarrow p\alpha + q\beta + r\gamma \neq 0$,

d'où le résultat annoncé. ■

23.2.3 … de deux droites

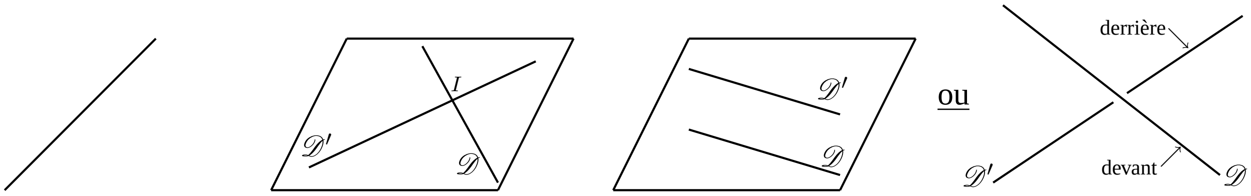
Proposition 3 : Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites de $\mathscr{E}$. Alors soit

(i) $\mathscr{D} = \mathscr{D}'$ **;**

(ii) $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}' = \{I\} \Leftrightarrow$ **$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires et $\mathscr{D} \nparallel \mathscr{D}'$;**

(iii) $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}' = \varnothing \Leftrightarrow \begin{cases} & \mathscr{D} \text{ et } \mathscr{D}' \text{ coplanaires et } \mathscr{D} \parallel \mathscr{D}', \\ \underline{\text{ou}} & \mathscr{D} \text{ et } \mathscr{D}' \text{ non coplanaires et } \mathscr{D} \nparallel \mathscr{D}'. \end{cases}$

Voici les illustrations correspondants à chacun de ces trois cas :



(i) $\mathscr{D} = \mathscr{D}'$ (ii) $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}' = \{I\}$ (iii) $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}' = \varnothing$

démonstration : *Le cas (i) est évident puisque deux droites ont tout à fait le droit d'être les mêmes ! Supposons alors qu'elles sont distinctes. Considérons le plan $\mathscr{P}$ défini par $\mathscr{D}$ et un point A' de $\mathscr{D}'$ n'appartenant pas à $\mathscr{D}$. Soit $\mathscr{P}$ contient un autre point de $\mathscr{D}'$, et donc $\mathscr{D}' \subset \mathscr{P}$, c'est-à-dire $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ coplanaires. L'intersection ou le parallélisme se déduit alors de la position de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ dans $\mathscr{P}$. Soit $\mathscr{P}$ ne contient pas d'autre point de $\mathscr{D}'$, et dans ce cas, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires et donc* a fortiori *non parallèles (sinon elles seraient justement coplanaires).* ■

23.3 Plans contenant une droite donnée

D'après la proposition 1, toute droite est intersection de deux plans non parallèles. Soient alors $\mathscr{D}$ une droite donnée et $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ non parallèles tels que $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q} = \mathscr{D}$. Notons $P(x,y,z) = 0$ et $Q(x,y,z) = 0$ des équations cartésiennes respectives de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$, aussi notées $P(M)$ et $Q(M)$ si $M(x,y,z) \in \mathscr{E}$.

Définition 5 : On appelle *faisceau de plans* engendré par $\mathscr{D}$ l'ensemble des plans contenant $\mathscr{D}$. On le note $\mathscr{F}_{\mathscr{D}}$.

`Remarque 5` : D'après notre petite introduction, on a alors $\mathscr{P}, \mathscr{Q} \in \mathscr{F}_{\mathscr{D}}$.

Théorème 2 : $\mathscr{F}_{\mathscr{D}} = F$, où F désigne l'ensemble des plans dont une équation cartésienne est combinaison linéaire de celles de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.

démonstration *: On va montrer la double inclusion :*

"$\subset$" : *Soit $\Sigma \in \mathscr{F}_{\mathscr{D}}$ avec $\Sigma \neq \mathscr{P}, \mathscr{Q}$. Alors il existe $M \in \mathscr{E}$ tel que $M \notin \mathscr{P}, \mathscr{Q}$ et $M \in \Sigma$ (avec $\mathscr{D}$, cela détermine entièrement Σ). En posant $\lambda = Q(M)$ et $\mu = -P(M)$, alors le plan Π : $\lambda P + \mu Q = 0$ contient M (car $\lambda P(M) + \mu Q(M) = Q(M)P(M) - P(M)Q(M) = 0$) et $\mathscr{D}$ (car $\forall\ A \in \mathscr{D}, A \in \mathscr{P} \cap \mathscr{Q} \Leftrightarrow P(A) = Q(A) = 0 \Rightarrow \lambda P(A) + \mu Q(A) = 0 \Rightarrow A \in \Pi$ donc $\mathscr{D} \subset \Pi$), d'où $\Sigma = \Pi \in F$ et finalement, $\mathscr{F}_{\mathscr{D}} \subset F$.*

"$\supset$" : *Soit $\Pi \in F$. Alors Π contient en particulier $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$, donc aussi $\mathscr{D}$, donc $\Pi \in \mathscr{F}_{\mathscr{D}}$ et par conséquent, $F \subset \mathscr{F}_{\mathscr{D}}$.*

Le résultat est ainsi démontré. ■

`Remarque 6` : Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles, alors l'ensemble F définit ce que l'on appelle le *faisceau de plans parallèles à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$*, qui est l'ensemble des plans parallèles à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ (la démonstration s'effectue à l'aide de la proposition 1, on la laissera en exercice).