

LEÇON N° 25 :

Définition et propriétés du barycentre de n points pondérés. Application à l'étude de configurations du plan, de l'espace.

Pré-requis :

- Géométrie dans le plan et dans l'espace ;
- Propriétés du calcul vectoriel ;
- Espaces et applications affines.

On se place dans un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et de direction $\vec{\mathcal{E}}$ (espace vectoriel associé).

25.1 Barycentre de n points pondérés

De manière introductive, en considérant une balance avec deux masses m à gauche (point A) et m' à droite (point B), il serait naturel de placer le point G tel que $m GA = m' GB$ afin d'obtenir l'équilibre. On se propose donc ici d'étudier l'ensemble S défini par :

$$S = \left\{ M \in \mathcal{E} \mid \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0}, \quad A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Dans la suite, on notera systématiquement (★) l'équation $\sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0}$, et on définit $m = \sum_{i=1}^n a_i$.

Théorème 1 : Si $\sum_{i=1}^n a_i = 0$, alors $S = \emptyset$ ou $S = \mathcal{E}$. Sinon, S admet un unique élément.

démonstration : Considérons un point O arbitraire dans $\mathcal{E}$. Dans ce cas, on a que

$$\sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}) = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}.$$

Si $m = 0$, alors (★) $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$. Le membre de gauche est une constante qui ne dépend pas de M : elle vaut soit 0, auquel cas tout $M \in \mathcal{E}$ est solution de (★) ; soit différente de 0 et cette équation n'admet pas de solution.

Si $m \neq 0$, alors

$$(★) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{OA_i}.$$

Cette égalité définit bien un point M solution de l'équation (★). Supposons alors que M' soit une autre solution de l'équation (★). Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0} &= \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{M'A_i} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i (\overrightarrow{MA_i} - \overrightarrow{M'A_i}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{MM'} = \vec{0} \Leftrightarrow M = M'. \end{aligned}$$

M est donc la seule solution de (★), d'où S admet un unique élément. ■

Définition 1 : Lorsque $m \neq 0$, on appelle **barycentre** des n points pondérés $\{(A_i, a_i)_i\}$ l'unique point G tel que $\sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

Proposition 1 :

- (i) **Commutativité :** Le barycentre de n points pondérés reste inchangé si l'on permute 2 ou plusieurs points ...
- (ii) **Homogénéité :** ...ou si l'on multiplie tous les coefficients a_i par un même nombre non nul ...
- (iii) **Associativité :** ...ou si l'on remplace certains points, dont la somme des coefficients est non nulle, par leur barycentre affecté de cette somme.

démonstration :

- (i) Découle du fait que l'addition de deux vecteurs est commutative.
- (ii) Soit $\lambda \neq 0$. Alors $G = \text{bar}\{(A_i, \lambda a_i)_i\} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (\lambda a_i) \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow G = \text{bar}\{(A_i, a_i)_i\}$.
- (iii) Soient $J \subset I = \{1, \dots, n\}$ et $H = \text{bar}\{(A_i, a_i)_{i \in J}\}$, sous réserve que $\sum_{i \in J} a_i \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} G = \text{bar}\{(A_i, a_i)_{i \in I}\} &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i \in J} a_i \overrightarrow{GA_i} + \sum_{i \in I \setminus J} a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \sum_{i \in J} a_i \overrightarrow{GH} + \sum_{i \in J} a_i \overrightarrow{HA_i} + \sum_{i \in I \setminus J} a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow m \overrightarrow{GH} + \sum_{i \in I \setminus J} a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow G = \text{bar} \left\{ \left(H, \sum_{i \in J} a_i \right), (A_i, a_i)_{i \in I \setminus J} \right\}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Le point (ii) de cette dernière proposition nous amène à définir :

Définition 2 : L'**isobarycentre** de n points pondérés est le barycentre de ces mêmes points, tous affectés des mêmes coefficients, et l'on note dans ce cas pour $\lambda \neq 0$,

$$G = \text{bar}\{(A_1, \lambda), \dots, (A_n, \lambda)\}.$$

25.2 Applications affines

Définition 3 (rappel) : Une application $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est dite *affine* s'il existe $A \in \mathcal{E}$ d'image A' et une application $\vec{f} : \vec{\mathcal{E}} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}$ linéaire tels que pour tout $M \in \mathcal{E}$, d'image M' , on ait $\overrightarrow{A'M'} = \vec{f}(\overrightarrow{AM})$.

Remarque 1 : Si $B \neq A$, alors $\vec{f}(\overrightarrow{BM}) = \vec{f}(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}) = \vec{f}(\overrightarrow{AM}) - \vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'M'} - \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{B'M'}$, donc cette définition est indépendante du point A .

Théorème 2 : $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est une application affine si et seulement si f conserve le barycentre.

démonstration :

" $\implies$ " : $\sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{G'A'_i} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{f}(\overrightarrow{GA_i}) = \vec{f}(\sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{GA_i}) = \vec{f}(\vec{0}) = \vec{0} \xLeftrightarrow{\text{déf}} G' = f(G) = \text{bar}\{(f(A_i), a_i)_i\}$.

" $\impliedby$ " : Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application conservant le barycentre, et $A \in \mathcal{E}$. A tout vecteur $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$ est associé un unique point $M \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$. On peut ainsi définir une application $\vec{f} : \vec{\mathcal{E}} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}$ par $\vec{f}(\vec{u}) = \overrightarrow{A'M'}$. Montrons alors que $\vec{f}$ est linéaire.

Soient $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \vec{\mathcal{E}}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $M_1, M_2, N \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AM_1} = \vec{u}_1$, $\overrightarrow{AM_2} = \vec{u}_2$ et $\overrightarrow{AN} = \lambda \overrightarrow{AM_1} + \mu \overrightarrow{AM_2} = \lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2$. Alors on peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AN} &= (1 - \lambda - \mu) \overrightarrow{AA} + \lambda \overrightarrow{AM_1} + \mu \overrightarrow{AM_2} \\ &= (1 - \lambda - \mu) (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NA}) + (\lambda + \mu) \overrightarrow{AN} + \lambda \overrightarrow{NM_1} + \mu \overrightarrow{NM_2} \\ &= \overrightarrow{AN} + (1 - \lambda - \mu) \overrightarrow{NA} + \lambda \overrightarrow{NM_1} + \mu \overrightarrow{NM_2} \\ \Leftrightarrow \vec{0} &= (1 - \lambda - \mu) \overrightarrow{NA} + \lambda \overrightarrow{NM_1} + \mu \overrightarrow{NM_2} \\ \Leftrightarrow N &= \text{bar}\{(A, 1 - \lambda - \mu), (M_1, \lambda), (M_2, \mu)\}. \end{aligned}$$

Par hypothèse, en notant N' l'image de N par f , on a

$$N' = \text{bar}\{(A', 1 - \lambda - \mu), (M'_1, \lambda), (M'_2, \mu)\},$$

et le raisonnement ci-dessus montre qu'alors $\overrightarrow{A'N'} = (1 - \lambda - \mu) \overrightarrow{A'A'} + \lambda \overrightarrow{A'M'_1} + \mu \overrightarrow{A'M'_2}$, c'est-à-dire

$$\vec{f}(\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) = \lambda \vec{f}(\vec{u}_1) + \mu \vec{f}(\vec{u}_2),$$

de sorte que $\vec{f}$ est linéaire. ■

25.3 Coordonnées d'un point

25.3.1 Vectorielles

Théorème 3 : Si le point A_i admet pour coordonnées (resp. affixe) $(x_{i1}, \dots, x_{ip})$ (resp. z_i) dans un repère affine de l'espace $\mathcal{E}$ (resp. un repère orthonormé direct du plan $\mathcal{E}$), alors les coordonnées $(g_1, \dots, g_p)$ (resp. l'affixe g) du point G sera donnée par

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad g_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n a_i x_{ij} \quad (\text{resp. } g = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n a_i z_i).$$

démonstration : Ceci découle directement de la définition... ■

25.3.2 Barycentriques

Soit $(A_0, A_1, \dots, A_p)$ un repère affine de $\mathcal{E}$ (donc tel que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $\overrightarrow{A_0 A_i}$ forme une base de $\mathcal{E}$). Soit $M \in \mathcal{E}$ quelconque. Il existe alors un unique $(p+1)$ -uplet $(x_0, \dots, x_p)$ tel que $M = \text{bar}\{(A_i, x_i)_{i \in \{0, \dots, p\}}\}$. Le point (ii) de la proposition 1 nous permet de supposer que $\sum_{i=0}^p x_i = 1$ (quitte à diviser chaque x_i par la somme de tous les x_i).

De petits calculs vectoriels montrent que dans ce cas, $\overrightarrow{A_0 M} = \sum_{i=1}^p x_i \overrightarrow{A_0 A_i} = (1 - \sum_{i=1}^p x_i) \overrightarrow{A_0 A_0} + \sum_{i=1}^p x_i \overrightarrow{A_0 A_i}$, de sorte que $M = \text{bar}\{(A_0, 1 - \sum_{i=1}^p x_i), (A_i, x_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}\}$.

Nous obtenons donc la définition suivante :

Définition 4 : On appelle alors l'unique $(p+1)$ -uplet $(x_0, x_1, \dots, x_p)$ défini ci-dessus les **coordonnées barycentriques du point M dans le repère affine $(A_0, A_1, \dots, A_p)$** .

Remarque : En particulier, pour l'isobarycentre G , on a $\overrightarrow{A_0 G} = \sum_{i=1}^p x_i \overrightarrow{A_0 A_i} \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, p\}, x_i = a_i/m$, ce qui implique que la première coordonnée barycentrique du point G est nulle.

25.4 Applications

25.4.1 Centre O du cercle circonscrit

Proposition 2 : Soit ABC un triangle acutangle (par abus de notation, on notera de la même manière un sommet de ce triangle et l'angle qui lui est associé). Alors

$$O = \text{bar}\{(A, \sin 2A), (B, \sin 2B), (C, \sin 2C)\}.$$

démonstration :

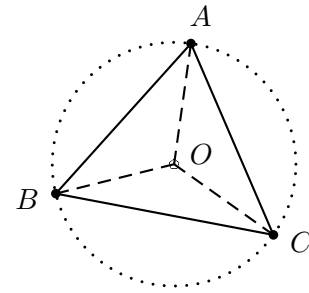
Décidons d'abord de l'orientation d'un angle en convenant que le sens négatif serait celui des aiguilles d'une montre (convention habituelle...).

Soit alors $\vec{u} = \vec{OA} \sin 2A + \vec{OB} \sin 2B + \vec{OC} \sin 2C$. Alors

$$\begin{aligned} \|\vec{u} \wedge \vec{OA}\| &= \|(\vec{OA} \sin 2A + \vec{OB} \sin 2B + \vec{OC} \sin 2C) \wedge \vec{OA}\| \\ &= \|\sin 2B(\vec{OB} \wedge \vec{OA}) + \sin 2C(\vec{OC} \wedge \vec{OA})\| \\ &\leq \|\sin 2B(\vec{OB} \wedge \vec{OA})\| + \|\sin 2C(\vec{OC} \wedge \vec{OA})\| \\ &\leq \sin(2B)R^2(-\sin 2C) + \sin(2C)R^2 \sin 2B = 0, \end{aligned}$$

donc $\vec{u}$ et $\vec{OA}$ sont colinéaires. On montrerait de même que $\vec{u}$ est aussi colinéaire à $\vec{OB}$ et $\vec{OC}$, ce qui contraint $\vec{u}$ d'être le vecteur nul.

De plus, $A + B + C = \pi$ implique que $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C \neq 0$ pour un triangle non aplati (ce qui est le cas ici...). ■

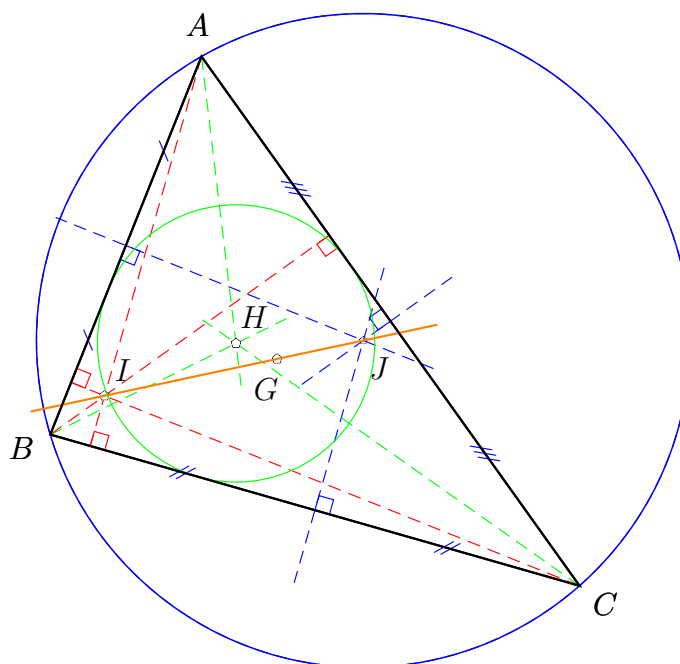


25.4.2 Droites remarquables d'un triangle non aplati

Proposition 3 : Soit ABS un triangle, a, b, c les longueurs BC, AC et AB , ainsi que α, β, γ la mesure des angles en A, B et C .

- (i) Les médianes sont concourantes en $G = \text{bar}\{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$,
- (ii) Les bissectrices le sont en $H = \text{bar}\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$,
- (iii) Les hauteurs le sont en $I = \text{bar}\{(A, \tan \alpha), (B, \tan \beta), (C, \tan \gamma)\}$,
- (iv) Les médiatrices le sont en $J = \text{bar}\{(A, \tan \beta + \tan \gamma), (B, \tan \alpha + \tan \gamma), (C, \tan \alpha + \tan \beta)\}$.

Illustrons ceci par un dessin, afin de mettre aussi au clair les notations utilisées dans cette proposition.



démonstration :

- (i) Soient A_m, B_m, C_m les milieux respectifs de $[BC], [AC], [AB]$. Alors $\overrightarrow{A_mB} = -\overrightarrow{A_mC}$, donc $A_m = \text{bar}\{(B, 1), (C, 1)\}$, et de même, $B_m = \text{bar}\{(A, 1), (C, 1)\}$ et $C_m = \text{bar}\{(A, 1), (B, 1)\}$. Mais dans ce cas, on détermine que $G = \text{bar}\{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\} = \text{bar}\{(A, 1), (A_m, 2)\}$, ce qui prouve que $G \in (AA_m)$. On montre alors de la même manière que G appartient aussi aux droites (BB_m) et (CC_m) , ce qui montre que ces trois droites sont bien concourantes en le barycentre annoncé.

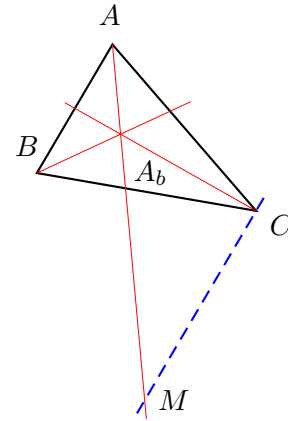
- (ii) Soient A_b (resp. B_b, C_b) les points définis respectivement par l'intersection de la bissectrice issue de A (resp. B, C) et du segment $[BC]$ (resp. $[AC], [AB]$). La parallèle à (AB) passant par C coupe la bissectrice (AA_b) en M , de sorte que les angles $\widehat{BAM}$ et $\widehat{AMC}$ soit égaux (alternes-internes), rendant le triangle ACM isocèle (et en particulier, $AC = CM$). Par application du théorème de Thalès dans les triangles A_bAB et A_bMC , on montre que

$$\frac{A_bB}{A_bC} = \frac{A_bB}{A_bC} = \frac{AB}{CM} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}.$$

Or $A_b \in [BC]$, donc il existe un réel strictement positif k tel que $\overrightarrow{A_bB} = -k\overrightarrow{A_bC}$. D'après ce qui précède, et puisque les points A_b, B et C sont alignés, il vient que

$$k = \frac{A_bB}{A_bC} = \frac{c}{b},$$

d'où $b\overrightarrow{A_bB} = -c\overrightarrow{A_bC} \Leftrightarrow A_b = \text{bar}\{(B, b), (C, c)\}$. On montre de la même manière que $B_b = \text{bar}\{(A, a), (C, c)\}$ et $C_b = \text{bar}\{(A, a), (B, b)\}$. Mais dans ce cas, on détermine que $H = \text{bar}\{(A, a), (B, b), (C, c)\} = \text{bar}\{(A, a), (A_b, b+c)\}$, ce qui prouve que $H \in (AA_b)$. On montre alors de même que H appartient aussi à (BB_b) et (CC_b) , d'où le résultat.



- (iii) Soient A_h, B_h, C_h les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B et C . Supposons que chacun de ces points se situe dans le segment opposé. A_h étant le projeté orthogonal de A sur $[BC]$, il existe un réel k strictement positif tel que $\overrightarrow{A_hB} = -k\overrightarrow{A_hC}$. Ces trois points étant alignés, il vient que $k = A_hB/A_hC$. Mais alors

$$\tan \beta = \frac{AA_h}{BA_h} \quad \text{et} \quad \tan \gamma = \frac{AA_h}{CA_h} \implies k = \frac{\tan \gamma}{\tan \beta},$$

de sorte que $\tan \beta \overrightarrow{A_hB} = -\tan \gamma \overrightarrow{A_hC}$, ou encore $A_h = \text{bar}\{(B, \tan \beta), (C, \tan \gamma)\}$. On montre de même que $B_h = \text{bar}\{(A, \tan \alpha), (C, \tan \gamma)\}$ et $C_h = \text{bar}\{(A, \tan \alpha), (B, \tan \beta)\}$, et l'on conclut comme précédemment.

Supposons maintenant que l'un des trois pieds se situe en-dehors du segment opposé. Alors on peut se ramener au cas fraîchement traité par les formules de trigonométrie.

- (iv) On sait déjà que $A_m = \text{bar}\{(B, \lambda), (C, \lambda)\}$ pour tout réel λ non nul. Par le théorème des milieux, $(A_mB_m) \parallel (AB)$ (resp. $(B_mC_m) \parallel (BC)$ et $(A_mC_m) \parallel (AC)$), ce qui fait aussi des médianes de ABC les hauteurs du triangle $A_mB_mC_m$. Par (ii), les médiatrices de ABC sont alors concourantes en un point J tel que

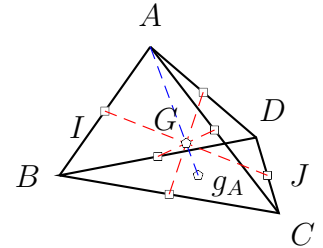
$$\begin{aligned} J &= \text{bar}\{(A_m, \tan \alpha), (B_m, \tan \beta), (C_m, \tan \gamma)\} \\ &= \text{bar}\{(B, \tan \alpha), (C, \tan \alpha), (A, \tan \beta), (C, \tan \beta), (A, \tan \gamma), (B, \tan \gamma)\} \\ &= \text{bar}\{(A, \tan \beta + \tan \gamma), (B, \tan \alpha + \tan \gamma), (C, \tan \alpha + \tan \beta)\}, \end{aligned}$$

d'où le résultat (les scalaires $1/2$ ont été omis après le second signe d'égalité par le (ii) de la proposition 1).



25.4.3 Médianes et bimédianes d'un tétraèdre

L'isobarycentre G d'un tétraèdre $ABCD$ est aussi le barycentre des deux points pondérés $(A, 1), (g_A, 3)$, où g_A désigne l'isobarycentre du triangle BCD (son centre de gravité). Les quatre « médianes » (segment joignant un sommet du tétraèdre au centre de gravité de la face opposée) d'un tétraèdre sont donc concourantes en G , qui est situé aux $3/4$ de chacune en partant du sommet.



Par associativité, le point G est aussi le barycentre des points $(I, 2), (J, 2)$, où I et J désignent les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$. Les trois « bimédianes » (segment joignant les milieux de deux arêtes opposées) sont aussi concourantes en G , qui est leur milieu commun.