

LEÇON N° 27 :

Composées d'homothéties et de translations du plan. Groupes des homothéties-translations. Applications.

Pré-requis :

- Calcul vectoriel (en particulier, relation de Chasles) ;
- Notions de groupes, sous-groupes et propriétés ;
- Théorème de Thalès.

On se place dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$, de direction $\vec{\mathcal{P}}$. Si f désigne une transformation, on primera systématiquement (sauf exceptions qui seront indiquées) les images des points, c'est-à-dire qu'on notera $f(M) = M'$.

27.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 : Soient Ω un point de $\mathcal{P}$ et $k \in \mathbb{R}^*$. On appelle *homothétie de centre Ω et de rapport k* la transformation qui à tout point $M \in \mathcal{P}$ associe le point $M' \in \mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$. Elle sera notée $h(\Omega, k)$ ou plus simplement h quand on l'applique à un point.

Remarques 1 :

- Une homothétie $h(\Omega, k)$ est dite positive (resp. négative) lorsque $k > 0$ (resp. $k < 0$) ;
- Si $k = 1$, c'est l'identité sur $\mathcal{P}$;
- Si $k = -1$, c'est la symétrie centrale de centre O .

Définition 2 : Soient $M, N \in \mathcal{P}$ et $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$ un vecteur non nul. On appelle *translation de vecteur $\vec{u}$* l'application qui à tout point $M \in \mathcal{P}$ associe le point $M' \in \mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Elle sera notée $t_{\vec{u}}$ ou plus simplement t quand on l'applique à un point.

Théorème 1 : Soit $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ une application. Alors f est une homothétie ou une translation si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{R}^* \mid \forall (M, N) \in \mathcal{P}^2, \quad \overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}.$$

démonstration :

" $\implies$ " : Si $f = h(\Omega, k)$, avec $k \neq 0$, alors

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'\Omega} + \overrightarrow{\Omega N'} = k\overrightarrow{M\Omega} + k\overrightarrow{\Omega N} = k\overrightarrow{MN}.$$

Si $f = t_{\vec{u}}$, avec $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'} = -\vec{u} + \overrightarrow{MN} + \vec{u} = \overrightarrow{MN}.$$

" $\Leftarrow$ " : Si $k = 1$, alors pour tous $M, N \in \mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$, donc le quadrilatère $MNN'M$ est un parallélogramme, donc on a aussi $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$. Si l'on note $\vec{u}$ ce vecteur, alors f est la translation de vecteur $\vec{u}$.

Supposons alors $k \neq 1$. Fixons arbitrairement un point O dans $\mathcal{P}$ et donnons-nous un autre point quelconque $M \in \mathcal{P}$. Alors $\overrightarrow{O'M'} = k\overrightarrow{OM}$. Cherchons si l'on peut en tirer des point fixes :

$$M = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{O'M} = k\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{O'O} = (k-1)\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{OO'},$$

ce qui prouve à la fois l'existence et l'unicité d'un point fixe, que nous noterons Ω . Notre relation de l'hypothèse devient alors

$$\forall M \in \mathcal{P}, \quad \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M},$$

donc f est l'homothétie de centre Ω et de rapport k . ■

Remarque 2 : Cette démonstration exhibe le fait que si $k = 1$, f est une translation et sinon, f est une homothétie.

Corollaire 1 : Une application f vérifiant l'égalité du théorème précédent est une application affine bijective.

démonstration : Commençons par définir l'application linéaire associée à f . Si les points M et N de $\mathcal{P}$ forment le vecteur $\vec{u}$, alors $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN} = k\vec{u}$, ce qui permet de définir directement l'application $\vec{f}$ qui à tout vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$ de $\mathcal{P}$ associe le vecteur $k\vec{u} = \overrightarrow{f(M)f(N)}$. Il est alors évident que $\vec{f}$ est une application linéaire ($\vec{f}(\vec{u} + \vec{v}) = k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v} = \vec{f}(\vec{u}) + \vec{f}(\vec{v})$ et $\vec{f}(\lambda\vec{u}) = k(\lambda\vec{u}) = \lambda(k\vec{u}) = \lambda\vec{f}(\vec{u})$) et bijective (en effet, si $\vec{v} \in \mathcal{P}$, alors $\vec{u} = \frac{1}{k}\vec{v}$ (rappel : $k \neq 0$) est le seul vecteur de $\mathcal{P}$ tel que $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{v}$), donc f est bien une application affine par définition même, et bijective. ■

27.2 Groupe et composition

Théorème 2 : L'ensemble des homothéties-translations muni de la loi de composition $\circ$ est un groupe, noté $HT(\mathcal{P})$.

démonstration : Il suffit de montrer que c'est un sous-groupe des transformations du plan.

- $\text{Id}_{\mathcal{P}} \in HT(\mathcal{P})$.
- Soient $f_1, f_2 \in HT(\mathcal{P})$. Pour tous $M, N \in \mathcal{P}$, on a

$$\overrightarrow{f_1 \circ f_2(M) f_1 \circ f_2(N)} = \overrightarrow{f_1(f_2(M)) f_1(f_2(N))} \stackrel{\text{thm 1}}{=} k_1 \overrightarrow{f_2(M) f_2(N)} \stackrel{\text{thm 1}}{=} k_1 k_2 \overrightarrow{MN},$$

donc le sens indirect du théorème 1 nous permet d'affirmer que $f_1 \circ f_2 \in HT(\mathcal{P})$.

– Soit $f \in HT(\mathcal{P})$. Pour tous $M, N \in \mathcal{P}$, on a

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = k\overrightarrow{MN} \quad \overset{f \text{ bij.}}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{k}\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{f^{-1}(M)f^{-1}(N)} \quad \overset{\frac{1}{k} \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad f^{-1} \in HT(\mathcal{P}).$$

Au final, $(HT(\mathcal{P}), \circ)$ est bien un groupe. Nous verrons plus loin qu'il n'est pas commutatif. ■

Théorème 3 : Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}$. Si $f = t_{\vec{u}}$ et $g = t_{\vec{v}}$, alors $f \circ g = t_{\vec{u} + \vec{v}}$.

démonstration : Soit $M \in \mathcal{P}$. Alors, avec $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{M'M''} = \vec{u}$, on a que $f \circ g(M) = f(M') = M''$, donc $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{u} + \vec{v}$, et $f \circ g = t_{\vec{u} + \vec{v}}$. ■

Théorème 4 : Soient $f = h(\Omega, k)$ et $g = h(\Omega', k')$. Alors

- (i) Si $kk' = 1$, $f \circ g = t_{\vec{u}}$ où $\vec{u} = (k - 1)\overrightarrow{\Omega\Omega'}$ (donc colinéaire à $\overrightarrow{\Omega\Omega'}$);
(ii) Sinon, $f \circ g$ est une homothétie de rapport kk' et de centre Ω'' , barycentre du système $\{(\Omega, 1 - k), (\Omega', k(1 - k'))\}$.

Remarque 3 : Sous les hypothèses du point (ii), $g \circ f$ serait alors l'homothétie de rapport $kk' \neq 1$ et de centre ω , barycentre du système $\{(\Omega, k'(1 - k)), (\Omega', 1 - k')\}$. En supposant $\Omega \neq \Omega'$, il est alors clair que $\omega \neq \Omega''$ (puisque $kk' \neq 1 \Rightarrow k$ et k' ne peuvent valoir simultanément 1), ce qui équivaut à $f \circ g \neq g \circ f$. En supposant $\Omega = \Omega'$, alors $\Omega'' = \Omega = \Omega' = \omega$.

Seule la composition de deux homothéties de même centre est commutative.

démonstration : Notons $\overrightarrow{\Omega'M'} = k'\overrightarrow{\Omega'M}$ et $\overrightarrow{\Omega'M''} = k\overrightarrow{\Omega'M'}$, de sorte que $f \circ g(M) = f(M') = M''$ et par suite, $\overrightarrow{\Omega'M''} = k\overrightarrow{\Omega\Omega'} + kk'\overrightarrow{\Omega'M}$.

(i) Si $kk' = 1$, alors $\overrightarrow{\Omega'M''} = k\overrightarrow{\Omega\Omega'} + \overrightarrow{\Omega'M} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM''} = k\overrightarrow{\Omega\Omega'} + \overrightarrow{\Omega'\Omega} = (k - 1)\overrightarrow{\Omega\Omega'}$. $\overrightarrow{MM''}$ ne dépend donc pas de M , donc $f \circ g$ est bien une translation de vecteur $(k - 1)\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.

(ii) Supposons $kk' \neq 1$, et recherchons les éventuels points fixes de $f \circ g$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega M} = k\overrightarrow{\Omega\Omega'} + kk'\overrightarrow{\Omega'M} &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega\Omega'} + \overrightarrow{\Omega'M} - kk'\overrightarrow{\Omega'M} = k\overrightarrow{\Omega\Omega'} \\ &\Leftrightarrow (1 - kk')\overrightarrow{\Omega'M} = (1 - k)\overrightarrow{\Omega\Omega'} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega'M} = \frac{1 - k}{1 - kk'}\overrightarrow{\Omega\Omega'}, \end{aligned}$$

ce qui définit un unique point fixe, noté Ω'' . Donc pour tout $M \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{\Omega M''} = k\overrightarrow{\Omega\Omega'} + kk'\overrightarrow{\Omega'M}$ (♯) et puisque Ω'' est point fixe de $f \circ g$, on a aussi $\overrightarrow{\Omega\Omega''} = k\overrightarrow{\Omega\Omega'} + kk'\overrightarrow{\Omega'\Omega''}$ (b). Par soustraction de (♯) et (b), on obtient $\overrightarrow{\Omega''M''} = kk'\overrightarrow{\Omega''M}$, ce qui prouve que $f \circ g$ est une homothétie de centre Ω'' et de rapport kk' .

Étudions de plus près le centre. Posons $f \circ g(\Omega') = f(\Omega') = \omega$, de sorte que

$$\overrightarrow{\Omega\omega} = \overrightarrow{\Omega\Omega''} + \overrightarrow{\Omega''\omega} = \overrightarrow{\Omega\Omega''} + kk'\overrightarrow{\Omega''\Omega'} = \overrightarrow{k\Omega f^{-1}(\Omega'')} + \overrightarrow{k g(\Omega'')\Omega'} = k\overrightarrow{\Omega\Omega'} = k'(\overrightarrow{\Omega\Omega''} + \overrightarrow{\Omega''\Omega'}).$$

L'avant dernière égalité se justifie de l'équivalence $f \circ g(\Omega'') = \Omega'' \Leftrightarrow g(\Omega'') = f^{-1}(\Omega'')$. On en tire alors

$$k(\overrightarrow{\Omega\Omega''} + \overrightarrow{\Omega''\Omega'}) - \overrightarrow{\Omega\Omega''} + kk'\overrightarrow{\Omega''\Omega'} = \vec{0} \Leftrightarrow k(1-k')\overrightarrow{\Omega''\Omega'} + (1-k)\overrightarrow{\Omega''\Omega} = \vec{0},$$

relation qui prouve que Ω'' est le barycentre du système $\{(\Omega, 1-k), (\Omega', k(1-k'))\}$. ■

Théorème 5 : Soient $f = h(\Omega, k)$ et $g = t_{\vec{u}}$, avec $k \neq 1$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$. Alors $f \circ g$ (resp. $g \circ f$) est une homothétie de rapport k et de centre Ω'' tel que $\overrightarrow{\Omega\Omega''} = \frac{k}{1-k} \vec{u}$ (resp. $\overrightarrow{\Omega\Omega''} = \frac{1}{1-k} \vec{u}$).

démonstration : Nous ne démontrerons qu'un seul résultat, l'autre s'étudiant de manière totalement analogue. En notant $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{\Omega M''} = k\overrightarrow{\Omega M'}$, on a $f \circ g(M) = f(M') = M''$. Est extraite des notations l'égalité (‡) suivante : $\overrightarrow{\Omega M''} = k\overrightarrow{\Omega M'} + k\vec{u}$, qui nous permet de rechercher s'il existe des points fixes :

$$\overrightarrow{\Omega M} = k\overrightarrow{\Omega M} + k\vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = \frac{k}{1-k} \vec{u},$$

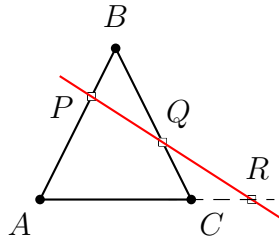
ce qui définit un unique point noté Ω'' , et implique alors que $\overrightarrow{\Omega\Omega''} = k\overrightarrow{\Omega\Omega''} + k\vec{u}$ (b). Par soustraction de (‡) et (b), on trouve que pour tout $M \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{\Omega'' M''} = k\overrightarrow{\Omega'' M}$, ce qui prouve bien que l'homothétie de centre Ω'' trouvée est bien de rapport k . ■

27.3 Applications

27.3.1 Théorème de Ménélaüs

Théorème 6 (de Ménélaüs) : Soit ABC un triangle. Soient $P \in (AB)$, $Q \in (BC)$ et $R \in (AC)$ trois points distincts des sommets. Alors

$$P, Q, R \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1.$$



démonstration :

" $\Rightarrow$ " : Soient $h_P : B \mapsto A$, $h_R : A \mapsto C$ et $h_Q : C \mapsto B$, de sorte que $h_Q \circ h_R \circ h_P(B) = B$. Si $h_Q \circ h_R \circ h_P$ est une homothétie, alors son centre est nécessairement B . On rappelle que si la composée de deux homothéties en est une, alors son centre est aligné avec celui des deux homothéties dont elle est issue, ce qui revient à dire dans notre cas que P, Q, R alignés impliquent

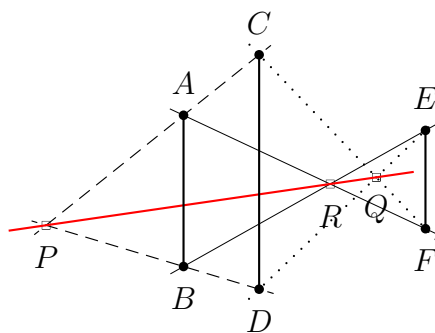
que B doit appartenir à (PQ) , ce qui est absurde (car $Q \neq B$ par hypothèse). Ainsi $h_Q \circ h_R \circ h_P$ est une translation admettant B comme point fixe, c'est donc l'identité. Autrement dit :

$$h_Q \circ h_R \circ h_P = \text{Id}_{\mathcal{D}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1.$$

" $\Leftarrow$ " : On considère les mêmes homothéties, dont la composée est de rapport 1 par hypothèse, c'est donc une translation qui admet B pour point fixe, donc c'est l'identité. On a donc $h_Q \circ h_R = h_P^{-1}$. Le premier membre est une homothétie de centre aligné avec Q et R , et le second membre est une homothétie de centre P , donc P est aligné avec Q et R . ■

27.3.2 Configuration des trapèzes

Proposition 1 : Soient $[AB]$, $[CD]$, $[EF]$ trois segments parallèles. On suppose que (AC) et (BD) (resp. (CF) et (DE) , (AF) et (BE)) se coupent en P (resp. Q , R). Alors P , Q , R sont alignés.



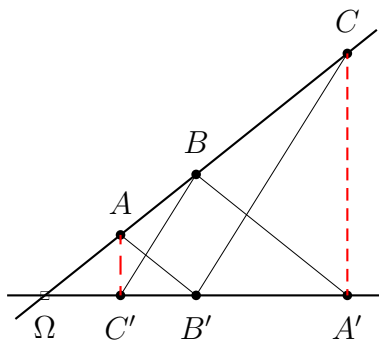
démonstration : Le théorème de Thalès appliqué dans différents triangles (les segments sont parallèles) présents dans cette figure nous assure l'existence de deux homothéties et leur composée définies par

$$\begin{array}{ccc} h_R : A & \mapsto & F \\ & B & \mapsto E \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} h_Q : F & \mapsto & C \\ & E & \mapsto D \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} h_Q \circ h_R : A & \mapsto & C \\ & B & \mapsto D. \end{array}$$

Par suite, le centre de $h_Q \circ h_R$ est non seulement aligné avec Q et R , mais il est aussi à l'intersection des droites (AC) et (BD) : c'est donc P . ■

27.3.3 Cas particulier du théorème de Pappus

Proposition 2 : Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites sécantes en Ω , A, B, C trois points de $\mathcal{D}$ et A', B', C' trois points de $\mathcal{D}'$. Si (AB') et $(A'B)$ sont parallèles, ainsi que (BC') et $(B'C)$, alors (AC') et $(A'C)$ le sont aussi.



démonstration : A nouveau, le théorème de Thalès nous assure l'existence de deux homothéties de centre O définies par

$$\begin{array}{ccc} h_1 : A & \mapsto & B \\ & & B' \mapsto A' \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} h_2 : B & \mapsto & C \\ & & C' \mapsto B' \end{array}.$$

Puisqu'elles admettent le même centre, elles sont commutative, et l'on note alors leur composée h ($h = h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$), de sorte que ce qui précède nous permet de déduire que $h(A) = C$ et $h(C') = A'$. Enfin, toute homothétie transforme une droite en droite parallèle (voir exercice suivant), donc (AC') et $(A'C)$ sont parallèles. ■

Exercice : Montrer qu'une homothétie transforme une droite en droite parallèle.

Montrons tout d'abord qu'une homothétie $h(\Omega, k)$ transforme une droite en droite. Soient A, B deux points de $\mathcal{P}$ et $M \in (AB)$. Il existe alors un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$. Or par le théorème 1 et ce qui précède, on sait que $\overrightarrow{A'M'} = k \overrightarrow{AM} = k\lambda \overrightarrow{AB} = \lambda(k\overrightarrow{AB}) = \lambda \overrightarrow{A'B'}$, d'où $M' \in (A'B')$.

C'est ensuite l'égalité vectorielle $\overrightarrow{A'B'} = k \overrightarrow{AB}$ qui assure le parallélisme des deux droites. ◇