LEÇON N° 30 :

Le cercle. Positions relatives d'une droite et d'un cercle, de deux cercle. Point de vue géométrique et point de vue analytique. Lien entre les deux points de vue.

Pré-requis :
- *Médiatrices, symétries : défintions et propriétés ;*
- *Théorème de Pythagore, d'Al-Kashi ;*
- *Produit scalaire, distance et projeté orthogonal.*

On se place dans le plan affine euclidien $\mathscr{P}$.

30.1 Le cercle

30.1.1 Définition et propriétés

Définition 1 :
◇ **Soient $O \in \mathscr{P}$ et r un réel positif. On appelle *cercle de centre O et de rayon r*, et l'on note $\mathscr{C}(0,r)$ l'ensemble des points de $\mathscr{P}$ à distance r de O.**
◇ **Soient $\mathscr{C}(O,r)$ un cercle, et $M, M' \in \mathscr{C}$. Le segment $[OM]$ est appelé *rayon du cercle $\mathscr{C}$*. Si $O \in [MM']$, alors le segment $[MM']$ est appelé *diamètre du cercle $\mathscr{C}$*.**

Proposition 1 : Si ABC est un triangle non aplati, il existe un unique cercle passant par ces trois points, dont le centre est le point d'intersection des trois médiatrices.

démonstration : *Par définition, le centre se trouve à égale distance des trois points, donc sur les trois médiatrices. Il ne reste donc plus qu'à montrer qu'elles sont concourantes : deux d'entre elles le sont forcément en un point O qui vérifie donc (par exemple) $OA = OB$ et $OB = OC$, donc aussi $OA = OC$, et O se trouve donc sur la troisième médiatrice.* ■

<u>Conséquence</u> : Le centre et le rayon qui déterminent un cercle sont uniques.

Proposition 2 :
(i) Tout diamètre d'un cercle en est axe de symétrie ;
(ii) Le centre d'un cercle en est centre de symétrie.

démonstration *:*
(i) Soit $\mathscr{C}(O,r)$ un cercle contenant un point M. Soient $[AB]$ un diamètre de ce cercle. On construit le point M', image de M par la symétrie d'axe (AB). Montrons que $M' \in \mathscr{C}$. Notons H le projeté orthogonal de M (donc aussi de M') sur $[AB]$, de sorte que les triangles OHM et OHM' soient rectangles en H. Puisque $[OH]$ est un côté commun, et $HM = HM'$ par définition de la symétrie axiale, le théorème de Pythagore nous assure que $OM = OM' = r$, donc $M' \in \mathscr{C}$.
(ii) Soit M'' le symétrique de M par rapport à O, selon la construction ci-dessus. Alors $OM = OM''$, donc $M'' \in \mathscr{C}$.

■

Théorème 1 (équation cartésienne) : Dans un repère orthonormé où O a pour coordonnées (a,b), l'équation d'un cercle $\mathscr{C}(0,r)$ est, pour tout point $M \in \mathscr{C}$ de coordonnées (x,y),

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Réciproquement, si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma \geqslant 0$, alors l'ensemble $\{M(x,y) \in \mathscr{P} \mid x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0\}$ est le cercle de centre $\Omega(\alpha,\beta)$ et de rayon $r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2-\gamma}$.

démonstration *: Soient $M(x,y) \in \mathscr{P}$ et H le projeté orthogonal de M sur la parallèle à l'axe des abscisses passant par O. Alors le triangle OHM est rectangle en H. Mais $OM = r$, $OH = |x-a|$ et $MH = |y-a|$, donc d'après le théorème de Pythagore, on a bien*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Réciproquement, $\{M(x,y) \in \mathscr{P} \mid x^2+y^2-2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0\} = \{M(x,y) \in \mathscr{P} \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = \alpha^2+\beta^2-\gamma\}$. Soient $O(\alpha,\beta)$ et H un point de $\mathscr{P}$ tel que $OH = |x-\alpha|$ sur la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par O et tel que $OH = |y-\beta|$ sur la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par O. Par construction, le triangle OHM est rectangle en H, d'où $OM = \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2-\gamma}$ par hypothèse. Par définition, cet ensemble est donc le cercle de centre $O(\alpha,\beta)$ et de rayon $\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\gamma}$. ■

Proposition 3 : Soient A, B deux points distincts de $\mathscr{P}$. L'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que le triangle AMB soit rectangle en M est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et de B.

démonstration *: Soit $M \in \mathscr{P}$ tel que le triangle AMB soit rectangle en M. Si N désigne le symétrique de M par rapport au milieu de $[AB]$, on montre facilement que le quadrilatère $AMBN$ est rectangle. En effet, notons s cette symétrie. Alors $s(A) = B$ et $s(M) = N$ impliquent (AM) // (BN). Or $(AM) \perp (BM)$, donc $(BN) \perp (BM)$. De plus, par conservation des angles géométriques, $s(\widehat{AMB}) = \widehat{BNA}$ est un angle droit. $AMBN$ possède donc trois angles droits : c'est un rectangle. Ses diagonales se coupent donc en leur milieu O, de sorte que (en particulier), $OA = OB = OM$, donc M est sur le cercle de rayon $\frac{AB}{2}$, c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AB]$.* ■

30.2 Positions relatives…

30.2.1 …d'un cercle et d'une droite

Théorème 2 : Soient $\mathscr{C}(O,r)$ un cercle, $\mathscr{D}$ une droite et H le projeté orthogonal de O sur $\mathscr{D}$. Alors :

(i) $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ ont 2 intersections si et seulement si $OH < r$;

(i) $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ ont 1 intersection si et seulement si $OH = r$;

(i) $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ n'ont pas d'intersection si et seulement si $OH > r$.

démonstration (analytique) *: Choisissons un repère orthonormé tel que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ admettent respectivement pour équations $x^2+y^2=r^2$ et $x=d$ (ce choix est possible en prenant le centre du cercle pour origine, la parallèle à $\mathscr{D}$ passant ce centre pour axe des ordonnées et l'unité est définie par r). Les ordonnées des éventuels points d'intersections de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ sont données par $y^2=r^2-d^2$, d'où 0, 1 ou 2 intersections selon que $d>r$, $d=r$ ou $d<r$.* ■

Définition 2 : Dans le cas (i), $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ sont dits *sécants*. Dans (ii), ils sont dits *tangents* et dans (iii), ils sont dits *extérieurs*.

Corollaire 1 : Il existe une unique droite tangente passant par un point M d'un cercle : c'est la perpendiculaire à (OM) passant par M.

démonstration *: Soit un repère orthonormé d'origine O tel que (OM) soit l'axe des abscisses. Alors $\mathscr{C}: x^2+y^2=r^2$ et d'après le théorème précédent, la seule droite $\mathscr{D}$ telle que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ soient tangentes est la droite d'équation $x=r$.* ■

30.2.2 …de deux cercles

Le paragraphe précédent assure que l'intersection de deux cercles comporte au plus deux points. On se donne deux cercles $\mathscr{C}(O,r)$ et $\mathscr{C}'(O',r')$ distincts et l'on note $d=OO'$.

Théorème 3 :

(i) $\mathscr{C}$ de $\mathscr{C}'$ ont 2 intersections si et seulement si $|r-r'|<d<r+r'$;

(ii) $\mathscr{C}$ de $\mathscr{C}'$ ont 1 intersection si et seulement si $d=r+r'$ ou $d=|r-r'|$;

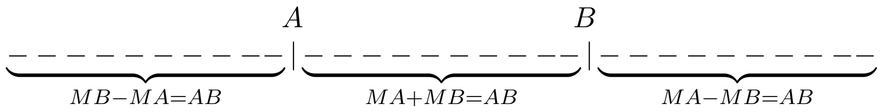
(iii) $\mathscr{C}$ de $\mathscr{C}'$ n'ont pas d'intersection si et seulement si $r+r'<d$ ou $d<|r-r'|$.

démonstration *: Nous aurons besoin des deux lemmes suivants avant de démontrer à proprement parler ce théorème.*

Lemme 1 : Soient $A, B \in \mathscr{P}$ deux points distincts, et $M \in \mathscr{P}$. Alors

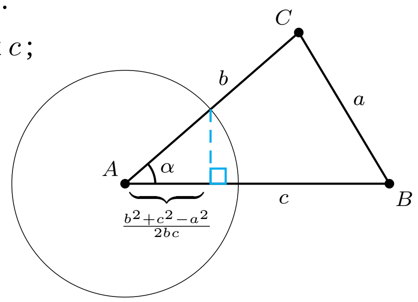
1. $AM+MB=AB \Leftrightarrow M \in [AB]$;
2. $|AB-AM|=BM$ ou $BM=AB+AM \Leftrightarrow M \in (AB)\backslash[AB]$.

démonstration *: Il suffit de faire un dessin pour s'en convaincre :*



□

Lemme 2 : Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors équivalence entre :



1. Il existe un triangle ABC de longueurs de côtés a, b et c ;
2. $\begin{cases} a \leqslant b+c \\ b \leqslant a+c \\ c \leqslant a+b \text{ ;} \end{cases}$
3. $|b-c| \leqslant a \leqslant b+c$.

démonstration *:*

2 ⇔ 3 : *trivial (calculs)*

1 ⇒ 2 : *Une distance vérifiant l'axiome de l'inégalité triangulaire, il n'y a rien à démontrer (en effet, si l'on est seulement muni d'un produit scalaire, étant dans un espace euclidien, celui-ci induit une distance qui vérifiera la propriété de l'inégalité triangulaire).*

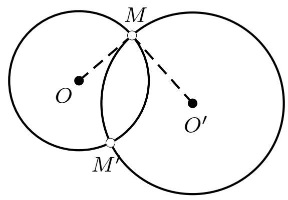
2 ⇒ 1 (figure ci-dessus) : *On choisit A, B tels que $AB = c$. L'hypothèse nous assure, après quelques calculs, que*

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \in [-1, 1],$$

et il existe donc un réel α tel que (grâce à la structure de $\mathbb{R}$)

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\alpha.$$

Par le théorème d'Al-Kashi, il existe alors un angle $\hat{A}$ de mesure α. Soit alors C le point de la demi-droite issue de A tel que $\widehat{BAC} = \alpha$ et $AC = b$. On vérifie enfin assez facilement que $BC = a$. □



$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont sécants en M et M' si et seulement si l'on peut construire une triangle OMO' tel que $OM = r$, $O'M = r'$ et $OO' = d$, donc (lemme 2) si et seulement si $|r - r'| \leqslant d \leqslant r + r'$.

(iii) D'où, si $d > r + r'$ ou $d < |r - r'|$, alors $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}' = \varnothing$.

(ii) Montrons que les propositions suivantes sont équivalents :

a. $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ n'ont qu'une intersection

b. $M \in (OO')$

c. $d = |r - r'|$ ou $d = r + r'$.

*"**a⇒b**" : La symétrie d'axe (OO') laisse invariants les deux cercles, il en est de même pour leur intersection qui se trouve donc sur l'axe.*

*"**b⇒c**" : Le lemme 1 nous apporte alors les relations $d = |r - r'|$ ou $d = r + r'$ en distinguant les cas $M \in (OO') \backslash [OO']$ et $M \in [OO']$.*

*"**c⇒a**" : Enfin, si l'on suppose $OO' = r + r'$ et en considérant M le point de $[OO']$ tel que $OM = r$, on a $O'M = r'$ et $M \in \mathscr{C} \cap \mathscr{C}'$. En supposant de plus que M' soit une autre intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, le sens direct du lemme 1 (i) nous assure que $M' \in [OO']$, donc $M = M'$. On montre de même que $M = M'$ en supposant que $OO' = |r - r'|$.*

(i) D'après ce qui précède le cas $|r-r'| \leqslant d \leqslant r+r'$ donne deux intersections, et seul les cas $d=r+r'$ et $d=|r-r'|$ apportent deux intersections communes, donc lorsque $|r-r'|<d<r+r'$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se coupent selon deux intersections distinctes. ∎

30.3 Points de vue géométrique et analytique. Liens

Dans ce paragraphe, on munit $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé, et on considère le cercle $\{M \in \mathscr{P} \mid x^2+y^2-2ax-2bx-c=0\}$ de centre $O(a,b)$ et de rayon $r=\sqrt{a^2+b^2-c}$ (théorème 1).

30.3.1 Puissance d'un point par rapport à un cercle

Théorème 4 : Soit $M \in \mathscr{P}$, et $\mathscr{D}$ une droite passant par M coupant $\mathscr{C}$ en deux points P et P'. Alors le nombre $\overline{MP} \cdot \overline{MP'} = MO^2 - r^2$ est indépendant de $\mathscr{D}$.

démonstration : *Soit H le projeté orthogonal de O sur $\mathscr{D}$, de sorte que $\overline{HP'}=-\overline{HP}$. Alors*

$$\begin{aligned}\overline{MP}\cdot\overline{MP'} &= (\overline{MH}+\overline{HP})(\overline{MH}+\overline{HP'}) = (\overline{MH}+\overline{HP})(\overline{MH}-\overline{HP}) \\ &= MH^2-HP^2 = MH^2-(r^2-OH^2) = MO^2-r^2.\end{aligned}$$

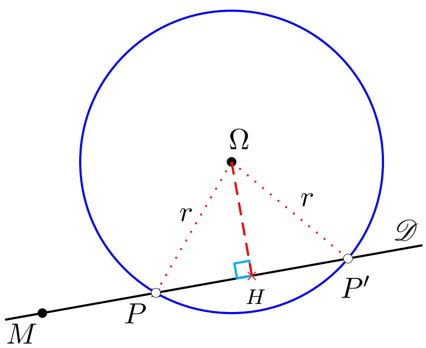
∎

Définition 3 : On note ce nombre indépendant $P_{\mathscr{C}}(M)=MO^2-r^2$ et on l'appelle *puissance de M par rapport à $\mathscr{C}$*.

`Remarque 1` : Si $P=P'$ (autrement dit, si la droite $\mathscr{D}$ passant par M est tangente à $\mathscr{C}$), alors le triangle MOP est rectangle en O, de sorte que $P_{\mathscr{C}}(M)=MO^2-r^2=MP^2$ par le théorème de Pythagore.

Proposition 4 : Soit $M(x,y) \in \mathscr{P}$. Alors $P_{\mathscr{C}}(M)=x^2+y^2-2ax-2bx+c$.

démonstration :



On a :

$$\begin{aligned}P_{\mathscr{C}}(M) &= MO^2-r^2=(x-a)^2+(y-b)^2-r^2 \\ &= x^2+y^2-2ax-2by+a^2-b^2-(a^2+b^2-c) \\ &= x^2+y^2-2ax-2by+c.\end{aligned}$$

∎

Conséquence :

- L'ensemble des points M du plan ayant la même puissance par rapport à un cercle $\mathscr{C}\big(O(a,b),r\big)$ est un cercle de centre O et de rayon $R=\sqrt{a^2+b^2-c+P_{\mathscr{C}}(M)}$, où $P_{\mathscr{C}}(M)$ est une constante ;
- Si $P_{\mathscr{C}}(M)=0$, alors cet ensemble est exactement $\mathscr{C}$.

30.3.2 Axe radial de deux cercles non concentriques, centre radial

On se donne un autre cercle $\mathscr{C}'(O',R)$ de centre $O'(a',b')$ distinct de O, et d'équation $x^2+y^2-2a'x-2b'y+c'=0$.

Théorème 5 : L'ensemble des points M du plan tels que $P_{\mathscr{C}}(M) = P_{\mathscr{C}'}(M)$ est une droite $\mathscr{D}$ perpendiculaire à (OO').

démonstration : *Soit H le projeté orthogonal de M sur (OO'). Alors :*

$$\begin{aligned}
P_{\mathscr{C}}(M)=P_{\mathscr{C}'}(M) &\Leftrightarrow MO^2-r^2=MO'^2-R^2 \Leftrightarrow MO^2-MO'^2=r^2-R^2\\
&\Leftrightarrow OH^2+HM^2-(O'H^2+HM^2)=r^2-R^2\\
&\Leftrightarrow (\overline{OH}+\overline{O'H})(\overline{OH}-\overline{O'H})=r^2-R^2\\
&\Leftrightarrow (\overline{OH}+\overline{O'O}+\overline{OH})\cdot\overline{OO'}=r^2-R^2\\
&\Leftrightarrow \overline{OH}=\frac{r^2-R^2}{2\cdot\overline{OO'}}+\frac{\overline{OO'}}{2},
\end{aligned}$$

ce qui détermine H de manière unique, donc l'ensemble recherché est bien une droite perpendiculaire à (OO'). ■

Conséquence :

- Si $\mathscr{C}\cap\mathscr{C}'=\{A,B\}$ avec $A\neq B$, alors $\mathscr{D}=(AB)$;
- Si $\mathscr{C}\cap\mathscr{C}'=\{A\}$, alors $\mathscr{D}$ est la tangente en A commune à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$;
- Si $\mathscr{C}\cap\mathscr{C}'=\varnothing$, alors $\mathscr{D}$ est extérieure aux deux cercles. En effet, si $\mathscr{D}\cap\mathscr{C}=\varnothing$, il existerait au moins un point intérieur à $\mathscr{C}$ qui aurait une puissance négative par rapport à ce cercle $\mathscr{C}$ et positive par rapport au cercle $\mathscr{C}'$ (au sens strict), ce qui est absurde.

Théorème 6 : Si $\mathscr{C}''$ est un cercle dont le centre O'' n'appartient pas à (OO'), alors les trois axes radicaux possibles sont concourants en un point ayant la même puissance par rapport aux trois cercles.

Une illustration se trouve ci-dessous, après la conséquence donnant un moyen facile de construire chaque axe radical.

démonstration : *Notons $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$, $\mathscr{D}''$) l'axe radical des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ (resp. $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}''$, $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}''$). Notons I le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ (il existe, car les trois cercles n'ont pas leurs centres alignés). Par définition, ce point admet la même puissance par rapport à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}''$ (car sur $\mathscr{D}$) et à $\mathscr{C}'$ (car sur $\mathscr{D}'$). En particulier, il a la même puissance par rapport aux cercle $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}''$, donc $I\in\mathscr{D}''$.* ■

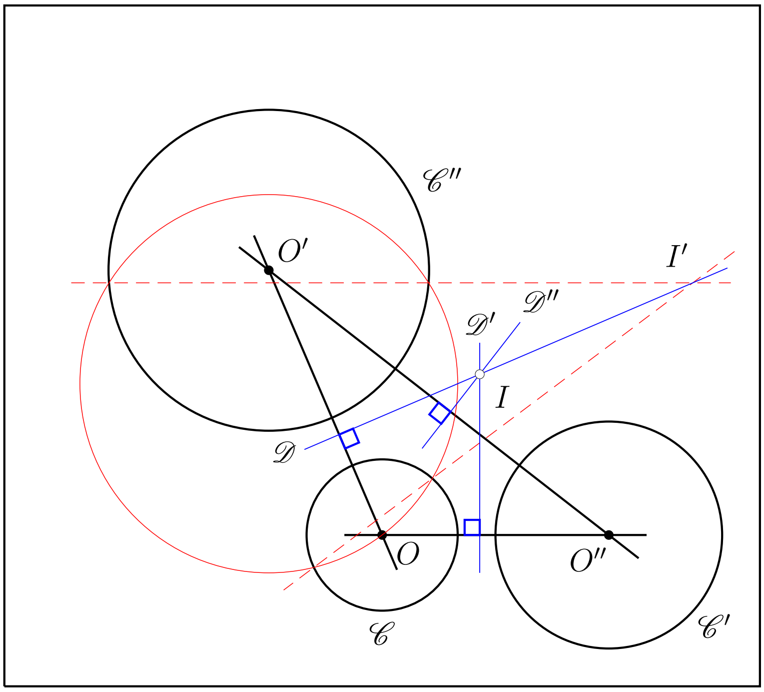
Définition 5 : Ce point est appelé *centre radical* des trois cercles $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}''$.

Conséquence : On peut construire l'axe radical de deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ disjoints en ajoutant un cercle $\mathscr{C}'$ sécant à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, et dont le centre n'est pas sur la droite formée des centres des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

Le schéma ci-dessous illustre le théorème 6. Pour la construction des axes radicaux, seule celle de $\mathscr{D}$ a été mise en évidence grâce à la conséquence ci-dessus : on a construit un troisième cercle (que l'on nomme C) (rouge) vérifiant les conditions. Alors l'axe radical des cercle C et $\mathscr{C}''$ est la droite joignant les deux intersections de ces cercles. En particulier, le point I' sur cette droite admet la même puissance par rapport à ces deux cercles. De même, l'axe radical des cercles C et $\mathscr{C}$ est la droite joignant les intersections de ces deux droites. Puisque I' est dessus, il a la même puissance par rapport à ces deux cercles.

On en déduit que $P_{\mathscr{C}}(I') = P_{\mathscr{C}''}(I')$, donc I' est sur l'axe radical des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}''$. Cet axe doit (d'après le théorème 5) être perpendiculaire à (OO'), ce qui nous permet de le dessiner.

On construit les deux autres axes radicaux de la même manière, et le point d'intersection est donc le centre radical recherché :



30.3.3 Faisceaux de cercles

Soient $f(x,y) = 0$ et $g(x,y) = 0$ les équations de deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ non concentriques.

Définition 6 : On appelle *faisceau de cercles engendré par $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$* l'ensemble de cercles (et droites) dont une équation est $\lambda\, f(x,y) + \mu\, g(x,y) = 0$, avec $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}^2)^*$.