LEÇON N° 31 :

Théorème de l'angle inscrit. Cocyclicité. Applications.

Pré-requis :
- *Angles orientés de vecteurs, mesure principale, notation « modulo » ;*
- *Relation de Chasles ;*
- *π = mesure de l'angle plat (indépendant de l'orientation choisie du plan) ;*
- *Pour tout triangle ABC, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \pi \pmod{2\pi}$.*

On se place dans le plan affine euclidien orienté $\mathscr{P}$.

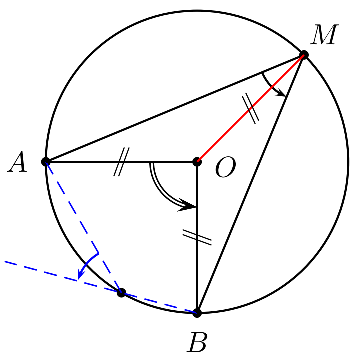
31.1 L'angle inscrit

Définition 1 : Soient $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et M, A, B trois points distincts de ce cercle. L'angle orienté $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est appelé l'*angle inscrit*. L'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est appelé l'*angle au centre*.

Théorème 1 : Soient $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et M, A, B trois points distincts de ce cercle. On a alors

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \pmod{\pi} \quad \text{ou} \quad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \pmod{2\pi}.$$

démonstration :



Comme les triangles OAM et OBM sont isocèles, on a

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) &= \pi - 2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA}) \pmod{2\pi} \quad \textit{et}\\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}) &= \pi - 2(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MO}) \pmod{2\pi}.\end{aligned}$$

En utilisant la relation de Chasles, on obtient donc

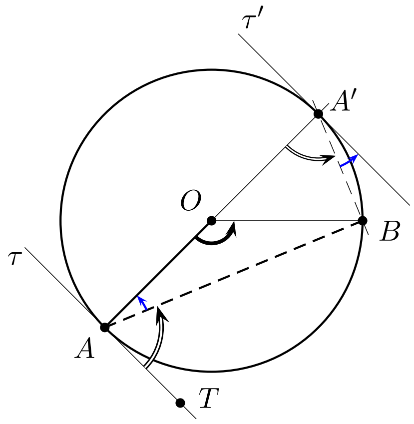
$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) &= 2\pi - 2\big((\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA})\big) \pmod{2\pi}\\ &= -2(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) \pmod{2\pi}\\ &= 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \pmod{2\pi},\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Corollaire 1 : Soit τ la tangente au cercle $\mathscr{C}$ en A, et T un point de τ. Alors

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \pmod{\pi}.$$

démonstration *:*



Soit A' le point de $\mathscr{C}$ diamétralement opposé à A. Alors

$$(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'B}) = (\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \pmod{\pi}.$$

Donc, par le théorème 1, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) &= (\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'B}) \pmod{\pi} \\ &= (\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \pmod{\pi}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Corollaire 2 : On a

$$(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \pmod{\pi}.$$

démonstration *: Le corollaire 1 implique que $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \pmod{\pi}$. Le théorème 1, quant à lui, implique que $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \pmod{\pi}$. Par soustraction membre à membre, on obtient $0 = (\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \pmod{\pi}$, soit $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \pmod{\pi}$.* ■

31.2 Lignes de niveau

Dans la suite, A et B sont deux points distincts de $\mathscr{P}$, et α un réel donné. On pose

$$\Gamma_\pi^\alpha = \{M \in \mathscr{P} \mid (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \pmod{\pi}\} \quad \text{et} \quad \Gamma_{2\pi}^\alpha = \{M \in \mathscr{P} \mid (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \pmod{2\pi}\}.$$

Proposition 1 :

(i) Si $\alpha = 0 \pmod{\pi}$, alors $\Gamma_\pi^\alpha = (AB)$;

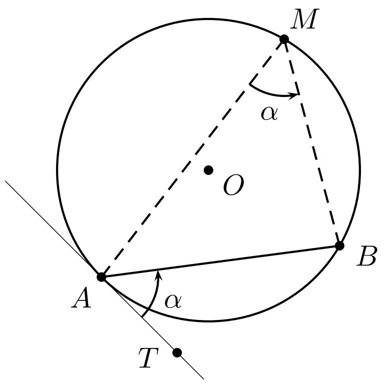
(ii) Si $\alpha \neq 0 \pmod{\pi}$, alors Γ_π^α est le cercle passant par A et B de centre l'intersection de la droite perpendiculaire à (AT) (elle-même définie par $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \alpha \pmod{\pi}$) passant par A et de la médiatrice de $[AB]$.

démonstration *: Le cas (ii) ci-dessus est illustré dans cette démonstation.*

(i) trivial

(ii) *Nous allons montrer la double inclusion :*

- *Soient $T \neq A$ un point tel que $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \alpha \pmod{\pi}$, O l'intersection de la perpendiculaire Δ à (AT) passant par A et de la médiatrice $\mathscr{D}$ de $[AB]$, et $\mathscr{C}$ le cercle de centre O passant par A (et donc aussi par B). Remarquons que (AT) est la tangente à $\mathscr{C}$ en A. Si M est un point de $\mathscr{C}$, le corollaire 2 nous assure que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \pmod{\pi}$, donc $M \in \Gamma_\pi^\alpha$. On a donc $\mathscr{C} \subset \Gamma_\pi^\alpha$.*



- *Réciproquement, si $M \in \Gamma_\pi^\alpha$, alors on a par hypothèse ($\alpha \neq 0 \pmod{\pi}$) que M, A, B sont non alignés. Il existe donc un cercle $\mathscr{C}'$ passant par ces trois points. Soient O son centre et τ la tangente en A à $\mathscr{C}'$ et $T \in \tau$. Alors par le corollaire 2, $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \pmod{\pi}$, ce qui détermine τ et O (comme intersection de "Δ" et $\mathscr{D}$). Donc $\mathscr{C}' = \mathscr{C}$ et $M \in \mathscr{C}$, d'où $\Gamma_\pi^\alpha \subset \mathscr{C}$.* ■

Proposition 2 :

(i) Si $\alpha = 0 \pmod{2\pi}$, alors $\Gamma_{2\pi}^\alpha = (AB) \backslash [AB]$;

(ii) Si $\alpha = \pi \pmod{2\pi}$, alors $\Gamma_{2\pi}^\alpha =]AB[$;

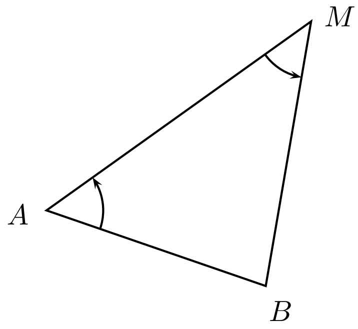
(iii) Sinon, $\Gamma_{2\pi}^\alpha$ est l'un des deux arcs $\overset{\frown}{AB}$ (A et B exclus) suivant le cercle défini dans la proposition A (ii), déterminé par l'appartenance de $\alpha \pmod{2\pi}$ à l'intervalle $]-\pi, 0[$ ou $]0, \pi[$.

démonstration *:*

(i)-(ii) *trivial*

(iii) *Remarquons que $\Gamma_\pi^\alpha = \Gamma_{2\pi}^\alpha \cup \Gamma_{2\pi}^{\alpha+\pi}$, donc $\Gamma_{2\pi}^\alpha \subset \Gamma_\pi^\alpha$.*
Or $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$ et $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ sont de même sens et changent donc simultanément de sens selon la position de M par rapport à la droite (AB) (par hypothèse, $M \notin (AB)$).

Si la mesure principale d'un angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ défini modulo 2π pour un point de $\Gamma_{2\pi}^\alpha$ est dans $]0, \pi[$ (resp. $]-\pi, 0[$), celle d'un angle analogue pour un point de $\Gamma_{2\pi}^{\alpha+\pi}$ est dans $]-\pi, 0[$ (resp. $]0, \pi[$). Par suite, les angles $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ pour $M \in \Gamma_{2\pi}^\alpha$ et $M \in \Gamma_{2\pi}^{\alpha+\pi}$ sont de sens opposés, donc $\Gamma_{2\pi}^\alpha$ est l'un des arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\Gamma_{2\pi}^{\alpha+\pi}$ l'autre.



■

Conséquence de la proposition 1 : On a le critère de cocyclicité suivant :

Théorème 2 : Quatre points A, B, C, D distincts sont alignés ou cocycliques si et seulement si

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \pmod{\pi}.$$

démonstration :

« ⇒ » : *Si alignés, l'égalité est immédiate. Supposons alors A, B, C, D cocycliques et notons O le centre du cercle obtenu. Alors le théorème 1 nous assure que*

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \pmod{\pi} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \pmod{\pi},$$

D'où $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \pmod{\pi}$.

« ⇐ » : *Notons α la mesure principale de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, de sorte que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \alpha \pmod{\pi}$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = \alpha \pmod{\pi}$. D'où $C, D \in \Gamma_\pi^\alpha$ et donc, par la proposition 1, $C, D \in (AB)$ si $\alpha = 0 \pmod{\pi}$ et les quatre points sont alignés, ou alors $C, D \in \mathscr{C}$ avec $\mathscr{C}$ cercle passant par A et B, et les quatre points sont cocycliques.* ■

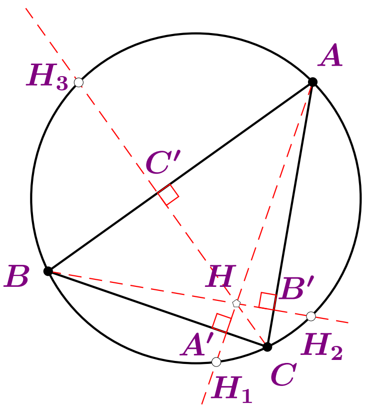
31.3 Applications

31.3.1 Symétries

Proposition 3 :

Soit ABC un triangle non aplati, H son orthocentre et $\mathscr{C}$ son cercle cireconscrit. Les trois cercles définis par symétrie de $\mathscr{C}$ par rapport aux côtés du triangle sont concourrants en H.

(les notations supplémentaires présentes sur la figure seront introduites dans la démonstration)



démonstration : *Soient H_1, H_2 et H_3 les symétriques de H par rapport à $(BC), (AC)$ et (AB). Par définition de la hauteur, $(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{HC'}) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ et $(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{HB'}) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. Donc d'après le théorème 2, les points A, H, B', C' sont cocylciques. De plus, puisqu'une symétrie axiale change les angles orientés en leurs opposés, on a les égalités suivantes, modulo π :*

$$(\overrightarrow{H_1B}, \overrightarrow{H_1C}) = -(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = -(\overrightarrow{HB'}, \overrightarrow{HC'}) = (\overrightarrow{HC'}, \overrightarrow{HB'}) \overset{\text{thm 2}}{=} (\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}),$$

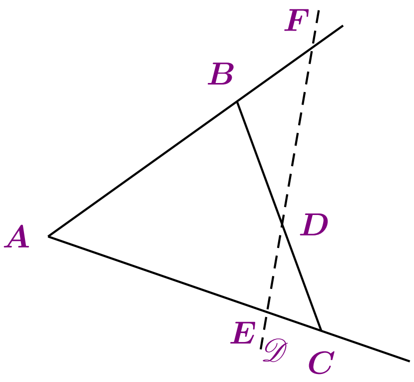
donc (toujours par le théorème 2), les points A, B, C, H_1 sont cocycliques, d'où $H_1 \in \mathscr{C}$. On montre de la même manière que $H_2, H_3 \in \mathscr{C}$.

Le symétrique de $\mathscr{C}$ (contenant B, C, H_1) par rapport à (BC) passe donc par B, C et H, et on montre ainsi avec les deux autres cercles que le point H est leur seul point d'intersection. ■

31.3.2 Point de Miquel

Proposition 4 :

Soit ABC un triangle non aplati, $\mathscr{D}$ une droite coupant respectivement (BC), (AC) et (AB) en D, E et F. Les cercles circonscrits aux triangles ABC, DBF, AEF, DEC sont concourrants en un point appelé *point de Miquel*.



démonstration : *Notons $\mathscr{C}_1$ à $\mathscr{C}_4$ les quatres cercles donnés par l'énoncé (dans le même ordre). B est une intersection de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, nous allons donc noter M l'autre. On a alors que $\underline{M \neq B}$, car sinon il existerait une homothétie transformant $\mathscr{C}_1$ en $\mathscr{C}_2$, en particulier A en F et C en D, ce qui impliquerait que $(AC) \,//\, (DF)$, ce qui est absurde.*

On montre de même, en utilisant $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$, que $\underline{M \neq E}$.

Ensuite, $\underline{M \neq A}$ (resp. $\underline{M \neq C}$, $\underline{M \neq D}$, $\underline{M \neq F}$) car sinon $\mathscr{C}_2$ (resp. $\mathscr{C}_2, \mathscr{C}_1, \mathscr{C}_1$) contiendrait A, B, F (resp. B, C, D ; B, C, D ; A, B, F) qui sont alignés.

On peut ainsi appliquer le théorème 2 au cercle $\mathscr{C}_2$:

$$(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DF}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BF}) \pmod{\pi} \Rightarrow (\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}) \pmod{\pi},$$

et au cercle $\mathscr{C}_1$:

$$(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}) \pmod{\pi},$$

donc $(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA}) \pmod{\pi} = (\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CE}) \pmod{\pi}$, et donc $M \in \mathscr{C}_4$.

De plus, $(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DC}) \pmod{\pi} \Leftrightarrow (\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FB}) = \overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EC}) \pmod{\pi}$ (théorème 2 dans les cercles $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_4$), ce qui est encore équivalent à

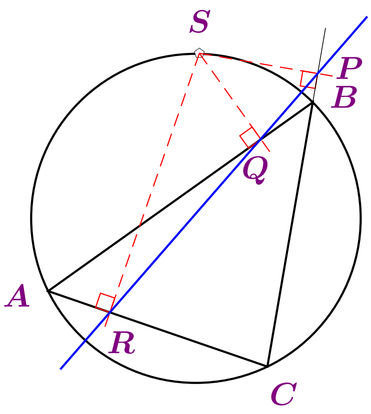
$$(\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FA}) = \overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EA}) \pmod{\pi} \quad \Leftrightarrow \quad M \in \mathscr{C}_3.$$

Finalement, le point M se trouve sur chacun des cercles $\mathscr{C}_1$ à $\mathscr{C}_4$, le résultat est ainsi démontré. ■

31.3.3 Droite de Simson

Proposition 5 :

Soit ABC un triangle non aplati, $S \in \mathscr{P}$ et P, Q, R les projetés orthogonaux de S sur les trois côtés. Alors P, Q, R sont alignés si et seulement si S est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.



démonstration : *On a* $(AC) \perp (RS)$ *et* $(AB) \perp (QS)$, *donc* $(\overrightarrow{AR}, \overrightarrow{AQ}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \pmod{\pi} = (\overrightarrow{SR}, \overrightarrow{SQ}) \pmod{\pi} \overset{\textit{thm 2}}{\Rightarrow} A, S, R, Q$ *cocylcilques* $\overset{\textit{thm 2}}{\Rightarrow} (\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RS}) = (\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AS}) \pmod{\pi}$. *On montre de même que*

$$(BC) \perp (PS) \text{ et } (AC) \perp (RS) \quad \overset{\textit{thm 2}}{\Rightarrow} \quad (\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RP}) = (\overrightarrow{CS}, \overrightarrow{CP}) \pmod{\pi}.$$

Donc $(\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RP}) = (\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RS}) + (\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RP}) = (\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AS}) + (\overrightarrow{CS}, \overrightarrow{CP}) \pmod{\pi}$. *Ainsi,* P, Q, R *alignés* $\Leftrightarrow (\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RP}) = 0 \pmod{\pi} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AS}) = (\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CS}) \pmod{\pi} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CS}) \pmod{\pi} \Leftrightarrow S, A, B, C$ *cocycliques* $\Leftrightarrow S$ *est sur le cercle circonscrit au triangle* ABC. ■