

LEÇON N° 49 :

Définitions de l'ellipse, géométriquement et par équation réduite ; équivalence entre ces définitions.

Pré-requis :

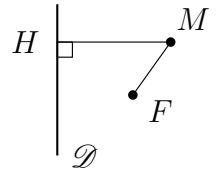
- Propriétés du barycentre de deux points ;
- Projections (orthogonale et selon une direction) ;
- Réflexions et propriétés.

On se place dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$.

49.1 Définition monofocale

49.1.1 Définition

Définition 1 : Soient $F \in \mathcal{P}$, $\mathcal{D}$ une droite ne contenant pas F et $e \in]0, 1[$ un réel. On appelle alors *ellipse de foyer F , de direction associée $\mathcal{D}$ et d'excentricité e* l'ensemble $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{P} \mid MF = eMH\}$, où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. On la note $\mathcal{E}(F, \mathcal{D}, e)$.



49.1.2 Axe focal, sommets

Définition 2 : Si K désigne le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$, la droite $\Delta = (KF)$ est appelée *axe focal de l'ellipse $\mathcal{E}(F, \mathcal{D}, e)$* .

Proposition 1 : Δ coupe $\mathcal{E}(F, \mathcal{D}, e)$ en deux points A et A' tels que

$$\overrightarrow{FA} = \frac{e}{e+1} \overrightarrow{FK} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{FA'} = \frac{e}{e-1} \overrightarrow{FK}.$$

démonstration : Soit $M \in \mathcal{E} \cap \Delta$. Alors $MF = eMH \Leftrightarrow MF^2 = e^2 MH^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MF} + e\overrightarrow{MH})(\overrightarrow{MF} - e\overrightarrow{MH}) = \vec{0}$. Puisque M, F et H sont alignés sur Δ , $H = K$, et l'égalité précédente est équivalente à $\overrightarrow{MF} \pm e\overrightarrow{MK} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MF} \pm e\overrightarrow{MF} \pm e\overrightarrow{FK} = \vec{0} \Leftrightarrow (1 \pm e)\overrightarrow{MF} = \pm e\overrightarrow{FK}$. Cette égalité détermine ainsi les deux points A et A' , tels que $(1+e)\overrightarrow{AF} = e\overrightarrow{KF}$ et $(1-e)\overrightarrow{A'F} = -e\overrightarrow{KF}$, c'est-à-dire

$$\overrightarrow{FA} = \frac{e}{e+1} \overrightarrow{FK} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{FA'} = \frac{e}{e-1} \overrightarrow{FK}.$$



Définition 3 : A et A' sont appelés sommets de $\mathcal{E}$. Il en résulte que $\mathcal{E}$ n'est pas vide.

Remarques 1 : Si O est le milieu de $[AA']$, alors :

$$\diamond \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA}.$$

démonstration : En effet, on a que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA'} &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FA'} = -\frac{e}{e+1}\overrightarrow{FK} + \frac{e}{e-1}\overrightarrow{FK} = \frac{2e}{(1+e)(1-e)}\overrightarrow{FK} \\ \Leftrightarrow \frac{1-e}{2}\overrightarrow{AA'} &= \frac{e}{e+1}\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{FA} \quad \Leftrightarrow (1-e)\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{FA} \\ \Leftrightarrow -e\overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{FA} - \overrightarrow{OA} \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{OF} = e\overrightarrow{OA}. \end{aligned}$$

■

$$\diamond \overrightarrow{OK} = \frac{1}{e}\overrightarrow{OA}.$$

démonstration : D'après ce qui précède, on a que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA'} &= -\frac{2e}{(e+1)(e-1)}\overrightarrow{FK} \Leftrightarrow (e-1)\overrightarrow{OA} = -\frac{e}{e+1}\overrightarrow{FK} = \left(\frac{1}{e+1} - 1\right)\overrightarrow{FK} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{e-1}{e}\right)\overrightarrow{OF} &= \frac{1}{e}\overrightarrow{FA} - \overrightarrow{FK} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FK} &= \frac{1}{e}\overrightarrow{OF} + \frac{1}{e}\overrightarrow{FA} \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{OK} = \frac{1}{e}\overrightarrow{OA}. \end{aligned}$$

■

49.1.3 Symétries

Proposition 2 : La médiatrice de $[AA']$ et Δ sont axes de symétrie de $\mathcal{E}$ et O en est centre de symétrie.

démonstration :

- ◇ Soit $M \in \mathcal{E}$. On a donc $MF = eMH$. Comme $F \in \Delta$, $s_\Delta(F) = F$, et en notant $M' = s_\Delta(M)$, il vient que $MF = M'F$. Or $s_\Delta(H) = H'$, où H' est le projeté orthogonal de M' sur $\mathcal{D}$, puisque s_Δ conserve le parallélisme et l'orthogonalité. Donc $M'H' = MH$, et donc $M'F = MF = eMH = eM'H' \Rightarrow M' \in \mathcal{E}$. Ainsi $s_\Delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$, d'où $s_\Delta(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ car s_Δ est involutive.
- ◇ (les chiffres encadrés rouges renvoient à la construction correspondant sur calculatrice : figure ci-dessous) Soit d la médiatrice de $[AA']$, et notons $M'' = s_d(M)$. Montrons que $M''F = eM''H$. On considère la projection p sur (FH) (1) parallèlement à $\mathcal{D}$. On a alors $p(F) = F$ et $p(K) = H$. Posons $B = p(A)$ (2) et $B' = p(A')$ (3). Puisque p conserve le barycentre, on a (grâce à la proposition 1) que $A = \text{bar}\{(F, 1), (K, e)\} \Rightarrow B = \text{bar}\{(F, 1), (H, e)\}$, et de même $B' = \text{bar}\{(F, 1), (H, -e)\}$. H étant fixé, le lieu des points $N \in \mathcal{D}$ tels que $NF = eNH$ est le cercle de diamètre $[BB']$ (ligne de niveau). Comme $MF = eMH$ (puisque M est supposé être sur $\mathcal{E}$), M est un point de ce cercle (5). Désignons alors par Ω (4) son centre, de sorte que $p(O) = \Omega$. Donc d porte un diamètre de ce cercle. Par conséquent, $M'' = s_d(M)$ est sur ce cercle et vérifie donc $M''F = eM''H$, d'où $M'' \in \mathcal{E}$ (7). On a donc $s_d(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$, c'est-à-dire $s_d(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ car $s_d \circ s_d = \text{Id}_{\mathcal{D}}$.

49.2 Définition par équation réduite

Théorème 1 : Soit $\mathcal{E}(F, \mathcal{D}, e)$ une ellipse. Il existe deux réels a, b (tels que $0 < b < a$) et un repère orthonormé $(O, \vec{i}, j\mathit{math})$ tels que $\mathcal{E}$ admette pour équation réduite

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (\star)$$

démonstration : O, F, A, K étant alignés dans cet ordre sur Δ , la remarque 1 nous assure que $OF = eOA$ et $OA = eOK$. Posons alors $a = OA$ et $c = OF$. On a alors $c = ea$ et $OK = \frac{a}{e}$. Choisissons alors O pour origine du repère, $\vec{i}$ tel que $\overrightarrow{OF} = c\vec{i}$ et $\vec{j}$ unitaire orthogonal à $\vec{i}$. Dans le repère $(O, \vec{i}, j\mathit{math})$, $\mathcal{D}$ a pour équation $x = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$, et par suite, si M a pour coordonnées (x, y) , alors

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow MF^2 = e^2 MH^2 \Leftrightarrow (x - c)^2 + y^2 = e^2 \left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2(1 - e^2) + y^2 = -c^2 + a^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \end{aligned}$$

La dernière équivalence s'explique du fait que $e < 1 \Rightarrow c < a \Rightarrow a^2 - c^2 > 0$. En posant $b^2 = a^2 - c^2$, nous trouvons le résultat voulu. ■

Remarque 3 : L'équation $(\star)$ permet de retrouver les éléments de symétrie.

Notations : c = "demi-distance focale" ; a = "demi-grand axe" et b = "demi-petit axe".

49.3 Liens

Le théorème précédent montre que les éléments géométriques d'une ellipse peuvent être caractérisés de manière analytique. Proposons maintenant le raisonnement inverse :

Théorème 2 : Soient $0 < b < a$. La courbe d'équation $(\star)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, j\mathit{math})$ est une ellipse de foyer $F(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e telles que

$$\mathcal{D} : x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad \text{et} \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

démonstration : On pose $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ et $e = \frac{c}{a}$. Alors la démonstration du théorème précédent nous assure que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow MF^2 = e^2 MH^2 \Leftrightarrow M \in \mathcal{E}$$

dès que $F(c, 0)$ et $\mathcal{D} : x = a^2/c$, d'où le résultat. ■

Tracé : Une ellipse $\mathcal{E}$ d'équation réduite $(\star)$ s'obtient par la réunion des courbes représentatives de

$$x \mapsto \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

49.4 Définition bi-focale

Proposition 4 : Soient a, c avec $a > c > 0$ donnés, et $F, F' \in \mathcal{P}$ tels que $FF' = 2c$. Alors

$$\{M \in \mathcal{P} \mid MF + MF' = 2a\}$$

est une ellipse de foyers F et F' .

démonstration : On se place dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que O soit le milieu de $[FF']$ et $\overrightarrow{OF} = c\vec{i}$. Soient $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x = a^2/c$ et $M(x, y) \in \mathcal{P}$. Alors

$$\begin{aligned} MF + MF' = 2a &\Rightarrow (MF + MF' - 2a)(MF + MF' + 2a) = 0 \Leftrightarrow (MF + MF')^2 - 4a^2 = 0 \\ &\Rightarrow [(MF + MF')^2 - 4a^2] [(MF - MF')^2 - 4a^2] = 0 \\ &\Rightarrow (MF^2 + MF'^2 - 4a^2) - 4(MF \cdot MF')^2 = 0 \\ &\Rightarrow [(x - c)^2 + y^2 + (x + c)^2 + y^2 - 4a^2]^2 - 4[(-x - c)^2 + y^2][(x + c)^2 + y^2] = 0 \\ &\Rightarrow (2x^2 + 2y^2 + 2c^2 - 4a^2)^2 - 4(x^2 + y^2 + c^2 - 2xc)(x^2 + y^2 + c^2 + 2xc) = 0 \\ &\Rightarrow (x^2 + y^2 + c^2)^2 + 4a^4 - 4a^2(x^2 + y^2 + c^2) - (x^2 + y^2 + c^2)^2 + 4x^2c^2 = 0 \\ &\Rightarrow x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \end{aligned}$$

avec $b^2 = a^2 - c^2 > 0$. Réciproquement, si M est un point de l'ellipse de foyers F et F' , de directrices $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, de demi-grand axe a et de demi-distance focale c , alors

$$\frac{MF}{MH} = e \quad \text{et} \quad \frac{MF'}{MH'} = e,$$

avec H et H' projetés orthogonaux de M respectivement sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. On en déduit que $MF + MF' = e(MH + MH')$, et puisque tout point de $\mathcal{E}$ se trouve entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, on a $MH + MH' = HH' = 2\frac{a^2}{c}$. D'où

$$MF + MF' = 2 \frac{c}{a} \frac{a^2}{c} = 2a.$$

■

Conséquence : Une autre construction d'une ellipse point par point : une ellipse définie par $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{P} \mid MF + MF' = 2a\}$ se construit en prenant les intersections de deux cercles de centres respectifs F et F' , de rayons r et r' tels que $r + r' = 2a$.

Ces deux cercles se coupent dès que $|r - r'| \leq FF'$, c'est-à-dire lorsque r et r' sont compris entre $a - c$ et $a + c$. Il suffit donc de faire varier r entre $a - c$ et $a + c$ pour avoir autant de points que l'on veut !

Cette construction s'appelle aussi la « construction du jardinier » car l'ellipse se construit dans la pratique (par exemple au tableau avec un lacet...) selon la méthode ci-dessous :

