LEÇON N° 2 :

Dénombrement.

Pré-requis :
- *Vocabulaire ensembliste ;*
- *Raisonnement par récurrence ;*
- Définition *: Un ensemble E est dit fini et de cardinal n, soit s'il est vide et alors $n = 0$, soit si $n \in \mathbb{N}^*$ et s'il existe une bijection de $E \longrightarrow [\![1, n]\!]$. On dit alors que E est un n-ensemble et on écrit* $\text{Card}(E) = n$ *(ou $|E| = n$).*

2.1 Réunions et produits d'ensembles finis

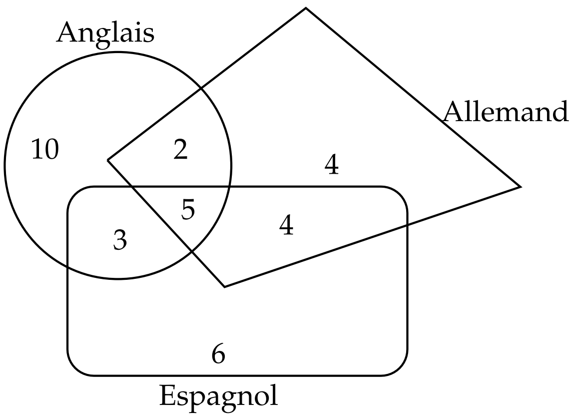
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_n$ n ensembles.

Proposition 1 : Si $E_1, \dots, E_n$ est une partition finie de E, alors : $$|E| = \sum_{i=1}^{n} |E_i| = \left| \coprod_{i=1}^{n} E_i \right|.$$

démonstration *: Il suffit de montrer que deux ensembles A de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et B de cardinal $p \in \mathbb{N}$ vérifient $|A \cup B| = |A| + |B|$ lorsque $A \cap B = \varnothing$. Le résultat est évident si $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$. Sinon, B est en bijection avec $[\![1, p]\!]$, donc avec $[\![n+1, n+p]\!]$, et par suite, $A \cup B$ est en bijection avec $[\![1, n]\!] \cup [\![n+1, n+p]\!] = [\![1, n+p]\!]$.* ■

Exemples :

1. *Diagramme de Venn* : Dans une classe, trois langues sont pratiquées. On sait que : 20 élèves font de l'anglais, 15 de l'allemand, 18 de l'espagnol, 7 de l'anglais et de l'allemand, 9 de l'allemand et de l'espagnol, 8 de l'anglais et de l'espagnol et enfin 5 pratiquent les trois langues. Quel est le nombre d'élèves ?



Solution : Le nombre d'élèves est donc de $10 + 2 + 5 + 3 + 6 + 4 + 4 = 34$. ◊

2. *Tableau de Cantor* : Sur un échantillon de 100 personnes, on sait que 68 sont des hommes, et que 43 d'entre eux sont non fumeurs. De plus, 12% de ces personnes sont des femmes fumeuses. Combien y a-t-il de non fumeurs ? (les chiffres en rouge sont donc ceux qui sont donnés par l'énoncé)

Sexe / Fumeur	OUI	NON	Total
Homme	25	43	68
Femme	12	20	32
Total	37	63	100

Solution : On en déduit qu'il y a en tout 63 personnes non fumeuses. ♢

3. **Exercice** : Excluant les lettres U, I, O et la combinaison SS, combien d'immatriculations est-il possible de faire avec en France (depuis 2009, les plaques sont de la forme MA-314-TH) ?

Solution : On a 23 possibilités pour la première lettre et autant pour la seconde, ce qui donne $23^2 = 529$ possibilités. On en enlève deux pour la bloc de gauche en raison des combinaisons SS et WW, soit 527. Pour le bloc de droite, il n'y a que la série SS à exclure, donc 528 possibilités. Pour les chiffres, toutes les combinaisons de 001 à 999 sont tolérées, soit 999 combinaisons. En tout, il y a donc :

$$527 \times 528 \times 999 = 277\ 977\ 744$$

plaques possibles. Pour information, le nombre estimé de véhicules circulant en France en 2011 est de 38 millions ! ♢

Définition 1 : Le *produit cartésien* de $p \in \mathbb{N}^*$ ensembles finis est l'ensemble noté $\prod_{i=1}^{p} E_i$:

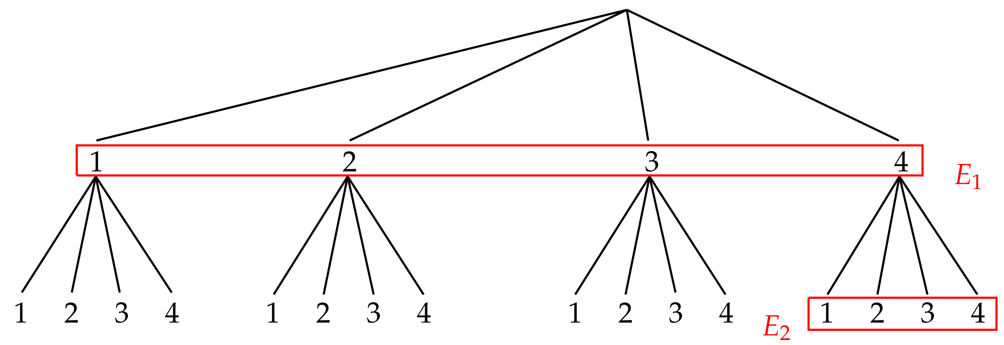
$$\prod_{i=1}^{p} E_i = E_1 \times \cdots \times E_p = \{(x_1, \ldots, x_p), \forall\ i \in [\![1, p]\!]\ : x_i \in\ E_i\}.$$

Théorème 1 : On a l'égalité suivante :

$$\left|\prod_{i=1}^{n} E_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |E_i|.$$

démonstration : *Reprenons les notations de la démonstration précédente. Si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_p\}$ et pour tout i entre 1 et n, $E_i = \{(a_i, y), y \in B\}$, alors $A \times B = \coprod_{i=1}^{n} E_i$ car les E_i sont deux à deux disjoints. Or $|E_i| = |B|$ car $(a_i, y) \longmapsto y$ est une bijection de $E_i \longrightarrow B$, et il en résulte que $|A \times B| = \sum_{i=1}^{n} |E_i| = \sum_{i=1}^{n} p = n \cdot p = |A| \cdot |B|$.* ■

Exemple (arbre) : On tire une boule avec remise dans une urne en contenant 4, puis on retire une boule dans cette urne.



On a $E_1 = E_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ et $E = E_1 \times E_2 \Rightarrow |E| = |E_1| \cdot |E_2| = 16$.

Exercice : Les restaurant « Math'rak » propose au choix 3 entrées, 5 plats et 4 desserts. Combien de menus peut-on y constituer ?

Solution : Notons respectivement E, P et D les ensembles constitués des 3 entrées, 5 plats et 4 desserts. Notons encore M l'ensemble des menus possibles. Alors $|M| = |E \times P \times D| = |E| \times |P| \times |D| = 3 \times 5 \times 4 = 60$. Ce restaurant peut donc constituer soixante plats différents. $\diamondsuit$

2.2 Dénombrement des arrangements et permutations

Soient A et B deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.

2.2.1 p-listes d'ensembles finis

Définition 2 : On appelle *p-liste d'éléments de A* toute liste $(a_1, \dots, a_p)$ de p éléments de A éventuellement répétés. L'ensemble des p-listes de A est noté A^p.

Proposition 1 : A^p est fini, et $|A^p| = |A|^p$.

démonstration : *$A^p = A \times \cdots \times A = \prod_{i=1}^{p} A \overset{thm\ 1}{\Longrightarrow} |A^p| = \prod_{i=1}^{p} |A| = |A|^p$, et il en résulte que A^p est fini (parce que A l'est).* ■

`Remarque 1` : Une p-liste d'éléments de A peut être identifiée à une application de $[\![1, p]\!] \longrightarrow A$, par exemple $i \longmapsto a_i$.

Théorème 2 : A^B, l'ensemble des applications de $B \longrightarrow A$, est fini, et l'on a $|A^B| = |A|^{|B|}$.

démonstration : *Si $B = \{b_1, \dots, b_p\}$, alors ($|B| = p$ et) $\phi : A^B \longrightarrow A^p : f \longmapsto (f(b_1), \dots, f(b_p))$ est bijective, donc $|A^B| = |A^p| = |A|^p = n^p = |A|^{|B|}$.* ■

2.2.2 Arrangements

Définition 3 : Un *arrangement de p éléments de A* ($p \in \mathbb{N}$) est une p-liste d'éléments deux à deux disjoints de A. On le note A_n^p et il est fini. Par convention, $A_n^0 = 1$.

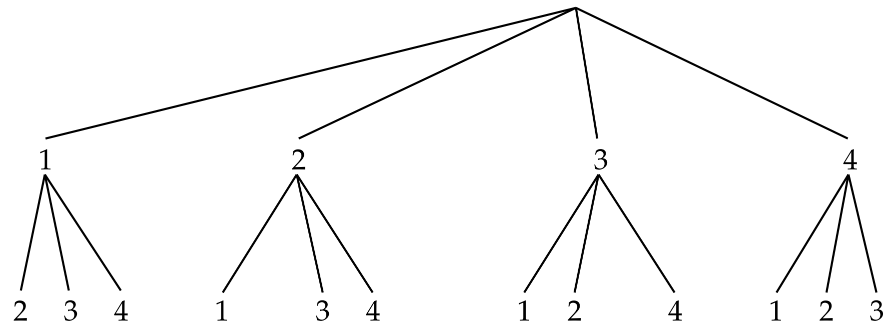
`Remarque 2` : Par suite, un tel arrangement peut s'identifier à une injection de $[\![1, p]\!]$ dans A.

Théorème 3 : Nous avons les égalités suivantes :

$$A_n^p = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n. \end{cases}$$

démonstration : *Soit $(a_1, \ldots, a_p)$ un arrangement. Il y a n choix possibles pour a_1, $(n-1)$ pour a_2 [en effet, les éléments devant être disjoints, le choix fait pour a_1 ne peut plus être pris ni pour a_2 ni pour les suivants], …, $(n-p+1)$ pour a_p. D'où $A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1)$. Alors si $p \leqslant n$, on a bien le résultat recherché, et si $p > n$, l'un des facteurs est nul, donc $A_n^p = 0$.* ■

Exemple (arbre) : Tirages successifs de deux boules d'une urne, sans remise. Quels sont les différents couples résultant de ce tirage ($(1, 4)$ signifierait que la boule n° 1 a été tirée en premier, puis la boule n° 4) ?



__Solution__ : On a déjà $A_4^2 = \dfrac{4!}{(4-2)!} = 12$ couples possibles. Les voici :

$$(1;2); (1;3); (1;4); (2;1); (2;3); (2;4); (3;1); (3;2); (3;4); (4;1); (4;2); (4;3).$$

♢

Exercice : Montrer que $A_n^p = p \cdot A_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p$.

__Solution__ : Soit un ensemble à n éléments. On suppose que cet ensemble a déjà subi un arrangement de p élément parmi n. On souhaite alors démontrer qu'en enlevant un élément quelconque de cet ensemble, on retrouve l'arrangement déjà effectué autrement. On décide donc de retirer un élément de cet ensemble : celui qui est retiré l'est soit de l'arrangement, c'est-à-dire l'un des p éléments parmi n (donc p possibilités) auquel cas il reste $(p-1)$ éléments à arranger parmi $(n-1)$, soit il ne l'est pas de l'arrangement (i.e. on enlève l'un des $n-p$ éléments non arrangés), et il reste p éléments à arranger parmi $(n-1)$. Ces deux possibilités étant distinctes, le cardinal de leur union est la somme des cardinaux (prop. 1), d'où :

$$A_n^p = p \cdot A_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p.$$

♢

Exercice : Démontrer le théorème 3 de manière non ensembliste.

Solution : Soient n, p deux entiers (avec $n \geqslant p$). On va montrer que $|A_n^p| = n(n-1)\cdots(n-p+1)$ par récurrence sur l'entier n.
Initialisation ($n = 1$) : La propriété est évidente.
Hérédité : Supposons que la propriété est vraie au rang $n-1$ et montrons qu'elle l'est toujours au rang n. Soit E un ensemble de cardinal n. Si $p = 1$, alors A_n^1 est naturellement en bijection avec l'ensemble E, donc $|A_n^1| = n$. En revanche, si $p > 1$, alors on note $A_n^p(e)$ (pour tout $e \in E$) l'ensemble des arrangements de p éléments de E de premier élément e. Par définition, cet ensemble ne contient que des éléments disjoints, formant une partition de A_n^p.

Il est aisé de constater que $A_n^p(x)$ est en bijection avec l'ensemble des arrangements de $(p-1)$ éléments de $E \backslash \{e\}$ (et $|E \backslash \{e\}| = n-1$), donc $A_n^p(e)| = |A_{n-1}^{p-1}| \overset{\text{H.R.}}{=} (n-1)\cdots((n-1)-(p-1)+1) = (n-1)\cdots(n-p+1)$. Par suite, puisque les ensembles $\{A_n^p(e), e \in E\}$ forment une partition de A_n^p, la proposition 1 nous assure que

$$|A_n^p| = \sum_{e \in E} |A_n^p(x)| = \sum_{e \in E} \underbrace{(n-1)\cdots(n-p+1)}_{\text{indépendant de } e} = n(n-1)\cdots(n-p+1),$$

ce qui achève notre récurrence. ◇

Définition 4 : Une *permutation de A* est un arrangement de n éléments de A. Le nombre de permutations de A (et donc de bijections de $E \longrightarrow E$) est donc $n!$ (c'est le cas particulier $n = p$ dans A_n^p).

2.3 Dénombrement des combinaisons, coefficients binomiaux

2.3.1 Définitions et propriétés

Définition 5 : Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. On appelle *combinaison* de $p \in \mathbb{N}$ éléments de E toute partie de E à p éléments. On note $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons de p éléments d'une ensemble en contenant n (il se lit « p parmi n »). Les coefficients $\binom{n}{p}$ sont appelés *coefficients binomiaux*.

`Remarques 3` :
- $\varnothing$ (resp. E) est la seule partie de E à 0 (resp. n) éléments, donc $\binom{n}{0} = 1$ (resp. $\binom{n}{n} = 1$) ;
- $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$ par définition ;
- Si $p > n$, il ne peut y avoir de parties de p éléments d'un ensemble en contenant n, donc si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$.

Théorème 4 : Soient $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$. Alors $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$.

démonstration : *Les nombre d'ensembles ordonnés de p éléments d'un ensemble à n éléments est A_n^p. Or il y a $\binom{n}{p}$ manières de choisir une partie à p éléments dans un ensemble à n éléments, et $p!$ manières d'ordonner les éléments dans chaque parties. Par le principe multiplicatif, on a donc l'égalité $A_n^p = p!\binom{n}{p}$, d'où le résultat, sachant que $A_n^p = n!/(n-p)!$.* ■

Conséquences : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.

2.3.2 Quelques résultats sur les coefficients binomiaux

Proposition 2 :

Formule de Pascal : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.

Formule itérée de Pascal : Soient $p \leqslant n$ deux entiers naturels. Alors $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

démonstration : *Montrons la formule de Pascal. Soit un ensemble E à n éléments. On suppose que l'on a « extrait » une partie à p éléments. Si l'on retire un élément $\{a\}$ à E, c'est soit un élément de la combinaison, soit non. Dans le premier cas, les $p-1$ éléments restants forment une partie de l'ensemble $E\backslash\{a\}$ de cardinal $n-1$, et dans le second, ce sont les p éléments qui forment une partie de $E\backslash\{a\}$. Cette union étant disjointe, les cardinaux s'ajoutent pour aboutir à l'égalité demandée.*

Montrons encore la formule itérée par récurrence sur l'entier n.

- **Initialisation :** *Lorsque $n = p$, les deux membres valent 1 d'après la remarque 1.*
- **Hérédité :** *Supposons la formule vraie au rang n, et montrons qu'elle l'est encore au rang $n+1$:*

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} \overset{H.R.}{=} \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}.$$

La dernière égalité étant justifiée par la formule de Pascal. ■

Théorème 5 (formule du binôme) : Soit A un anneau, $a, b \in A$ qui commutent. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}.$$

démonstration : *Par récurrence sur l'entier n.*

- **Initialisation :** *Avec la convention $0^0 = 1$, lorsque $n = 0$, les deux membres sont égaux à 1.*
- **Hérédité :** *Supposons la formule vraie au rang n, et montrons qu'elle est encore au rang $n+1$:*

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \overset{H.R.}{=} (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1}\, b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k\, b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k+1} \\
&= \underbrace{a^{n+1}}_{(k=n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k\, b^{n-k+1} + \underbrace{b^{n+1}}_{(k=0)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^0\, b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k\, b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1}\, b^0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k\, b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

La dernière égalité utilise la formule de Pascal pour l'addition des deux coefficients binomiaux. ■

Corollaire 1 : On a les égalités suivantes :

$$\textbf{(i)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad ; \quad \textbf{(ii)} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

démonstration : *Pour (i), on utilise le théorème précédent avec $a = 1$ et $b = 1$. Pour (ii), on l'utilise avec $a = -1$ et $b = 1$.* ■

`Remarques 5 :`
- Le point (i) traduit le fait que le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n. En effet, ce nombre est la somme des nombres de parties ayant respectivement 0, 1, ..., n éléments (le cardinal d'une union disjointe est la somme des cardinaux), ce qui correspond bien à la somme indiquée.
- Le point (ii) traduit le fait qu'il y a autant de parties de cardinal pair d'un ensemble à n éléments que de parties de cardinal impair.
- Les quatre propriétés ci-dessus peuvent servir à simplifier des calculs.

2.4 Applications

2.4.1 Exemples triviaux

Exercice : Soit les nombres obtenus en permutant 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

1. Quel est le nombre de ces nombres ?
2. Rangés par ordre croissant, quel est le rang de 362 145 ?
3. Montrer qu'aucun de ces nombres n'est ni premier, ni un carré parfait.
4. Quelle est la somme de ces nombres ?

Solution :
1. Il y en a exactement $6! = 720$.
2. Parmi ces nombres, $5!$ commencent par un 1, $5!$ par un 2, $4 \times 4!$ commencent par 31, 32, 34 ou 35 et enfin, $3!$ commencent par 361. Le nombre suivant (par ordre croissant) ne commençant pas par 361 étant 362 145, il suffit de compter le nombre de nombres inférieurs à celui-ci : il y en a $5! + 5! + 4 \cdot 4! + 3! = 342$. Finalement, 362 145 est le 343^{e} de ces nombres.
3. Pour tous les nombres, la somme des chiffres vaut 21, ils sont donc tous divisibles par 3 et donc non premiers. De plus, cette somme n'est pas multiple de 9, donc aucun de ces nombres n'est un carré parfait.
4. Puisque chacun des six chiffres peut occuper les six places, il y a $5!$ nombres où l'un de ces chiffres est celui des unités, autant où le même chiffre est chiffre des dizaines, etc. La somme des unités est donc égale à $1 \times (1+2+3+4+5+6) \times 5!$. La somme des dizaines est égale à $10 \times (1+2+3+4+5+) \times 5!$, etc. La somme recherchée est donc finalement égale à

$$120(1 + 10 + \cdots + 100000)(1 + 2 + \cdots + 6) = 279\,999\,720.$$

Cet exercice s'achève donc ici. On constate que si les autorités avaient voulu mettre en place un système d'immatriculation utilisant six chiffres, il aurait été tout aussi efficace que celui mis en place actuellement (voir exercice page 2). ◊

Exercice : Déterminer le nombre d'arrangements possibles avec les lettres de « SABRINA ».

Solution : Il y en a $7!/2! = 2\,520$. On divise par 2! car il y a deux lettres qui sont les mêmes dans le mot « SABRINA » : c'est le « A ». En effet, « SABRINA » = « SABRINA », bien que l'on puisse penser que dans le premier membre, le premier « A » est le premier du mot et dans le second, le premier « A » est le dernier du mot ; ces deux mots seraient donc différents, bien que ce sont les mêmes, et c'est pour cela que l'on divise par 2!. $\diamondsuit$

Exercice : 17 chevaux sont au départ d'une course. Déterminer le nombre d'arrivées possibles pour un quarté dans l'ordre et dans le désordre.

Solution : Dans le désordre, il s'agit de dénombrer les 4-listes de l'ensemble des 17 chevaux : $A_{17}^4 = 17 \times 16 \times 15 \times 14 = 57\,120$. Pour chaque combinaison gagnante, il y a $4! = 24$ combinaisons identiques si l'on ne tient pas compte de l'ordre, soit un total de $57\,120/24 = 2\,380$ combinaisons tenant compte de l'ordre. Remarquons que $2\,380 = \binom{17}{4}$. $\diamondsuit$

Le Loto : Il s'agit de choisir 7 nombres parmi 49. L'ordre ne comptant pas, on dénombre le nombre de parties de 7 éléments de l'ensemble $\{1, \ldots, 49\}$ de cardinal 49 : il y a donc $\binom{49}{7}$ possibilités, soit 85 900 584.

Dénombrement : On tire au hasard 5 cartes d'un jeu en comptant 32. Combien de tirages sont possibles où l'on ait...
– exactement trois rois ? $\binom{4}{3} \cdot \binom{28}{2} = 1\,512$;
– au moins trois rois ? $\binom{4}{3} \cdot \binom{28}{2} + \binom{4}{4} \cdot \binom{28}{1} = 1\,540$;
– deux $\heartsuit$ et trois $\diamondsuit$? $\binom{8}{2} \cdot \binom{8}{3} = 1\,568$;

2.4.2 Sommes

La formule itérée de Pascal permet de déterminer des sommes de la formes $\sum_{k=0}^{n} k^p$ pour un certain p donné. Voyons par exemple ce que cela donne avec $p = 1$, puis $p = 2$.

$$\boldsymbol{p = 1} : \qquad \sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\boldsymbol{p = 2} : \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{2!\,(k-2)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \binom{n+1}{3},$$

les premières égalités étant du calcul formel, et la dernière l'application de la formule itérée de Pascal. On en tire alors (connaissant le résultat pour $p = 1$) :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k^2 = \binom{n+1}{3} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2.4.3 Trigonométrie (linéarisation)

Exercice : Linéariser $\sin^3(x)$.

Solution : $\sin^3(x) = \left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\dfrac{1}{8i}(e^{ix}-e^{-ix})^3 = -\dfrac{1}{8i}\left(e^{3ix} - \binom{3}{1} e^{2ix}\, e^{-ix} + \binom{3}{2} e^{ix}\, e^{-2ix} - e^{-3ix}\right) = -\dfrac{1}{8i}(e^{3ix} - e^{-3ix} - 3(e^{ix}-e^{-ix})) = -\dfrac{1}{4}(\sin(3x) - 3\sin x)$. ♢

2.4.4 Petit théorème de Fermat

Théorème 6 : Soient p une entier naturel premier et $a \in \mathbb{Z}$. Alors $a^p \equiv a\ [p]$.

démonstration : *Puisque p est premier, alors pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$, p divise $\binom{p}{k}$. En effet, $\binom{p}{k} = p(p-1)\cdots(p-k+1)/k! \Leftrightarrow k!\,\binom{p}{k} = p(p-1)\cdots(p-k+1)$. Comme p est premier, il est premier avec tout entier le précédent, donc $p \wedge k = 1$, et il vient que p ne divise pas $k!$. Par le théorème de Gauss, il s'ensuit que p divise $\binom{p}{k}$. Procédons ensuite par récurrence sur l'entier $a \in \mathbb{N}$:*

- **Initialisation :** *Si $a = 0$, le résultat est évident.*
- **Hérédité :** *Supposons que $(a-1)^p \equiv a-1\ [p]$.*

$$a^p = (a-1+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (a-1)^k \equiv (a-1)^p + 1\ [p] \overset{H.R.}{\equiv} a-1+1\ [p] \equiv a\ [p].$$

Si $a \in (-\mathbb{N})^*$, alors $-a \in \mathbb{N} \Rightarrow (-a)^p \equiv -a\ [p]$. Supposons alors un instant $p \neq 2$ de sorte que la condition p premier soit équivalente à dire que p est impair. La relation de congruence précédente devient alors $-a^p \equiv -a\ [p] \Leftrightarrow a^p \equiv a\ [p]$. Enfin, si $p = 2$, alors quelque soit a, l'entier $a^p - a$ est pair, et donc divisible par p. ■

2.4.5 Formule de Van der Monde

Proposition 3 : Pour tous entiers m, n et p tels que $p \leqslant m+n$, on a l'égalité

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}.$$

démonstration : *Soit x un réel. Alors $(1+x)^m\,(1+x)^n = (1+x)^{m+n} = \displaystyle\sum_{p=0}^{m+n} \binom{m+n}{p} x^p$. Or*

$$\begin{aligned}
(1+x)^m\,(1+x)^n &= \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j\right) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \binom{m}{i}\binom{n}{j} x^{i+j} \\
&= \left[\binom{m}{0}\binom{n}{0}\right] + \left[\left(\binom{m}{0}\binom{n}{1} + \binom{m}{1}\binom{n}{0}\right)x\right] + \left[\left(\binom{m}{0}\binom{n}{2} + \right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\binom{m}{1}\binom{n}{1} + \binom{m}{2}\binom{n}{0}\right)x^2\right] + \cdots \\
&= \sum_{p=0}^{m+n} \left[\left(\sum_{\substack{i,j>0\ \mid \\ i+j=p}} \binom{m}{i}\binom{n}{j}\right) x^p\right].
\end{aligned}$$

Par identification des coefficients de ce polynôme de degré p, on obtient finalement que pour tout entier $p \in \{0, \ldots, m+n\}$,

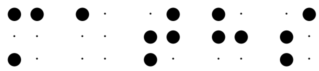
$$\binom{m+n}{p} = \sum_{\substack{i,j>0 \,|\\ i+j=p}} \binom{m}{i}\binom{n}{j} = \sum_{i=0}^{p} \binom{m}{i}\binom{n}{p-i}.$$

■

Alphabet braille

Avec une configuration de six points disposés en rectangle et tels que chacun puisse être en relief ou non (au moins un en relief), on dispose de $2^6 - 1 = 63$ signes différents pour décrire des lettres, des chiffres, et les ponctuations de la langue française.

En effet, chacun des six emplacements peut être en relief ou non, on dénombre donc les 6-listes de l'ensemble {relief, pas relief}, soit 2^6 possibilités, auxquelles on retranche celle où aucun des emplacements ne serait en relief.

 = « Maths »