

LEÇON N° 19 :

Transformations planes et nombres complexes.

Pré-requis :

- Nombres complexes : définition, conjugaison, écriture sous forme exponentielle, module et argument ;
- Définitions et propriétés des translations, réflexions, rotations, homothétie ;
- Similitude = composée d'une homothétie et d'une réflexion ;
- Théorème de l'arc capable.

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien, dont on choisit une base $(O, \vec{u}, \vec{v})$ orthonormée (ce qui permet de définir une orientation du plan, utile dans le paragraphe 2), et $\vec{\mathcal{P}}$ le plan vectoriel associé.

Un brin d'histoire...

Au début du XVIII^e siècle, le mathématicien suisse Jean Robert Argand représente des nombres complexes par des points dans un plan. C'est lui qui comprendra en premier la correspondance bi-univoque existante entre les points d'un plan et les nombres complexes. Il expliquera même comment le nombre imaginaire i peut être interprété comme une rotation d'angle $\pi/2$, et introduira le concept de module.

A l'époque des Grecs, ils leur fallait tracer une figure pour voir apparaître des « rapports de longueur », et ainsi passer de la figure aux nombres. La découverte et l'utilisation des nombres complexes a révolutionné la géométrie actuelle en faisant émerger la notion de vecteurs. La représentation géométrique des nombres complexes n'est apparue que bien longtemps après la création des nombres complexes (XVI^e siècle).

Introduction

Théorème 1 : Les applications

$$\begin{array}{ccc} \vec{\mathcal{P}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \vec{\omega} = x\vec{u} + y\vec{v} & \longmapsto & (x, y) \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ M(x, y) & \longmapsto & (x, y) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \longmapsto & x + iy \end{array}$$

sont des bijections.

Ce théorème nous permet donc d'associer un nombre complexe à chaque point du plan affine et à chaque vecteur du plan vectoriel associé. On a ainsi la définition suivante :

Définition 1 :

- Au point M de coordonnées (x, y) , on associe le nombre complexe $z = x + iy$ qui est appelé **affixe du point M** et noté z_M . On dit aussi que M est un point d'affixe z , noté $M|_z$.
- A tout vecteur $\vec{\omega} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ de $\vec{\mathcal{P}}$ est associé le nombre complexe $\zeta = \alpha + i\beta$ appelé **affixe du vecteur $\vec{\omega}$** et noté $\zeta_{\vec{\omega}}$.

Se donner une application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ revient donc à se donner une application $\tilde{f} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point $\tilde{f}(M)$ d'affixe $f(z)$. On notera indifféremment $f = \tilde{f}$ pour simplifier les notations.

19.1 Nombres complexes et géométrie, point de vue vectoriel

19.1.1 Rappels de quelques propriétés utiles

Théorème 2 : Soient A, B deux points de $\mathcal{P}$, $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ deux vecteurs et $k \in \mathbb{R}$. Alors :

- (i) $z_A = z_B \Leftrightarrow A = B$ et $z_{\vec{\omega}_1} = z_{\vec{\omega}_2} \Leftrightarrow \vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2$;
- (ii) $z_{\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2} = z_{\vec{\omega}_1} + z_{\vec{\omega}_2}$ et $z_{k\vec{\omega}_1} = k z_{\vec{\omega}_1}$.
- (iii) $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$.

démonstration : Cette démonstration utilise surtout le théorème 1. Posons $z_A = a_1 + ia_2$ et $z_B = b_1 + ib_2$, $\vec{\omega}_1 = \omega_{11}\vec{u} + \omega_{12}\vec{v}$ et $\vec{\omega}_2 = \omega_{21}\vec{u} + \omega_{22}\vec{v}$.

$$(i) \quad z_A = z_B \Leftrightarrow a_1 + ia_2 = b_1 + ib_2 \Leftrightarrow (a_1, a_2) = (b_1, b_2) \Leftrightarrow A = B. \text{ De même, } z_{\vec{\omega}_1} = z_{\vec{\omega}_2} \Leftrightarrow \omega_{11} + i\omega_{12} = \omega_{21} + i\omega_{22} \Leftrightarrow (\omega_{11}, \omega_{12}) = (\omega_{21}, \omega_{22}) \Leftrightarrow \omega_{11}\vec{u} + \omega_{12}\vec{v} = \omega_{21}\vec{u} + \omega_{22}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2.$$

$$(ii) \quad z_{\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2} = z_{(\omega_{11} + \omega_{21})\vec{u} + (\omega_{12} + \omega_{22})\vec{v}} = (\omega_{11} + \omega_{21}) + i(\omega_{12} + \omega_{22}) = z_{\vec{\omega}_1} + z_{\vec{\omega}_2}.$$

De plus, $z_{k\vec{\omega}_1} = z_{k\omega_{11}\vec{u} + k\omega_{12}\vec{v}} = k\omega_{11} + ik\omega_{12} = k(\omega_{11} + i\omega_{12}) = kz_{\vec{\omega}_1}$.

$$(iii) \quad z_{\vec{AB}} = z_{\vec{OB} - \vec{OA}} \stackrel{(ii)}{=} z_{\vec{OB}} - z_{\vec{OA}} = z_{b_1\vec{u} + b_2\vec{v}} - z_{a_1\vec{u} + a_2\vec{v}} = b_1 + ib_2 - a_1 - ia_2 = z_B - z_A.$$

■

Exercice 1 : Soient A, B et C trois points d'affixes respectives $4 + 2i$, $1 - 3i$ et -2 . Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

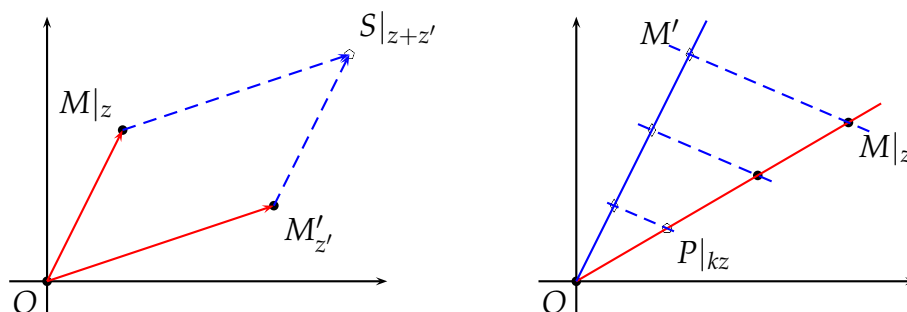
Solution : Un parallélogramme $ABCD$ est caractérisé par l'équation vectorielle $\vec{AD} = \vec{BC}$. En terme de complexes, si l'on note respectivement a, b, c et d les affixes des points A, B, C et D , il s'agit de trouver d tel que $d - a = c - b \Leftrightarrow d = c - b + a$, et l'on en déduit $d = -2 - 1 + 3i + 4 + 2i = 1 + 5i$. ◇

Constructions géométriques

Soient M, M' deux points du plan $\mathcal{P}$ d'affixes respectives z et z' .

L'addition de deux complexes étant possible, on peut définir l'addition de deux points du plan $\mathcal{P}$ par transport de structure : si z_S est une affixe vérifiant $z_S = z + z'$ (donc un point S de $\mathcal{P}$ lui est associé), alors on a aussi $z_S - 0 = z - 0 + z' - 0$, soit $\vec{OS} = \vec{OM} + \vec{OM'}$, ce qui permet de construire le point S , que l'on peut ainsi voir comme la somme des points M et M' .

De même, si k est un réel, et z_P une affixe vérifiant $z_P = kz$, alors on a aussi $z_P - 0 = k(z - 0)$, soit $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OM}$, ce qui permet de construire le point P associé à l'affixe z_P , que l'on peut aussi voir comme le produit du point M par le scalaire k .



Remarques 1 :

- Ces deux points nous rappellent que $\mathcal{P}$, aussi bien que $\mathbb{C}$, sont deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.
- Si k est constructible à la règle et au compas, alors le vecteur $\overrightarrow{OP}$ l'est aussi en utilisant par exemple le théorème de Thalès. En effet, on trace une droite passant par O mais ne contenant pas M . On choisit au compas une longueur arbitraire que l'on reporte autant de fois que nécessaire sur cette droite en partant de O ($k = n/p$: reporter p fois et marquer le n^e point si $n \leq p$ et n fois sinon en marquant le p^e point). Le tracé des parallèles assure alors que la droite (OM) sera coupée au point P recherché, comme le suggère l'exemple ci-dessus.

19.1.2 Nombres complexes et transformations

Théorème 3 : L'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même qui à z associe son conjugué $\bar{z}$ est l'écriture complexe de la réflexion d'axe des abscisses $(O, \vec{u})$.

démonstration : Soient M, M' deux points d'affixes respectives $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Alors $z' = f(z) = \bar{z} \Leftrightarrow x' + iy' = x - iy \Leftrightarrow (x', y') = (x, -y)$. C'est équivalent à dire que M' est la symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses $(O, \vec{u})$. ■

Théorème 4 : Soient $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{C}$ et les applications

$$\begin{array}{ccc} t : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + b \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} h : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az. \end{array}$$

Alors t est l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{\tau}$ d'affixe b , et h est l'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport a .

démonstration :

t : Soient $M|_z$ et $M'|_{z'}$ deux points. Alors $z' = t(z) = z + b \Leftrightarrow z' - z = b \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{\tau} \Leftrightarrow M' = t_{\vec{\tau}}(M)$, où $t_{\vec{\tau}}$ désigne la translation de vecteur $\vec{\tau}$ d'affixe b .

h : On suppose $a \in \mathbb{R}^*$. Alors $z' = h(z) = az \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = a\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow M' = h_{0,a}(M)$, où $h_{0,a}$ désigne l'homothétie de centre O et de rapport a . ■

19.2 Nombres complexes et géométrie, point de vue affine

On a déjà pu introduire plus tôt l'addition de deux points de $\mathcal{P}$ ainsi que la multiplication d'un point de $\mathcal{P}$ par un scalaire réel. On vient aussi de voir l'intérêt que suscite la multiplication de deux complexes, dans le sens où l'identification à $\mathcal{P}$ nous permet de transporter cette multiplication pour la définir entre deux points de $\mathcal{P}$, intuitivement plus difficile à faire.

Soient M, M' deux points de $\mathcal{P}$ d'affixes respectives $m = m_1 + im_2$ et $m' = m'_1 + im'_2$. Soit encore z_Q une affixe vérifiant $z_Q = zz'$. Alors on a $z_Q = (m_1 + im_2)(m'_1 + im'_2) = (m_1m'_1 - m_2m'_2) + i(m_1m'_2 + m_2m'_1)$, donc Q est le point de coordonnées $(m_1m'_1 - m_2m'_2, m_1m'_2 + m_2m'_1)$. Cela nous permet d'interpréter géométriquement le produit de deux nombres complexes, grâce au théorème suivant :

Théorème 5 : Soit $a \in \mathbb{C}^*$. L'application $z \mapsto az$ est l'écriture complexe de la similitude directe de centre O , de rapport $|a|$ et d'angle $\text{Arg}(a)$ (rotation si $|a| = 1$).

démonstration : Soient $M|_z$ et $M'|_{z'}$ deux points de $\mathcal{P}$. On a les équivalences suivantes :

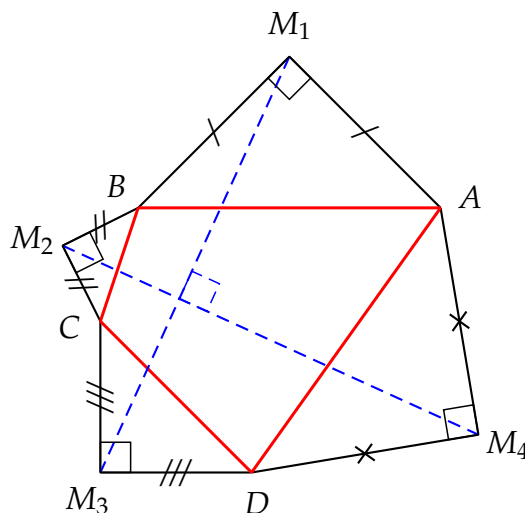
$$z' = f(z) = az \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{OM'}{OM} = \frac{|z'|}{|z|} = \left| \frac{z'}{z} \right| = |a| \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \text{Arg} \left(\frac{z'}{z} \right) = \text{Arg}(a) \end{cases} \Leftrightarrow M' = s_{O,|a|,\text{Arg}(a)}(M),$$

où $s_{O,|a|,\text{Arg}(a)}$ désigne la similitude de centre O , de rapport $|a|$ et d'angle $\text{Arg}(a)$ (c'est-à-dire la composée de l'homothétie de centre O et de rapport $|a|$ et de la rotation de centre O et d'angle $\text{Arg}(a)$).

Si $|a| = 1$, l'homothétie considérée est l'identité sur le plan $\mathcal{P}$, donc la similitude déterminée se réduit à la rotation de centre O et d'angle $\text{Arg}(a)$. ■

Exercice 2 : Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque. On construit les points M_1, M_2, M_3 et M_4 de sorte que les triangles respectifs ABM_1, BCM_2, CDM_3 et DAM_4 soient rectangles isocèles en ces points. Montrer que les droites (M_1M_3) et (M_2M_4) sont perpendiculaires et que $M_1M_3 = M_2M_4$.

Solution : Faisons une figure pour mieux voir les choses :



Notons par des lettres minuscules (et éventuellement indicées) les affixes correspondantes à chaque point. L'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto iz$ est une rotation puisque $|i| = 1$. Notons alors r la rotation vectorielle d'angle $\pi/2$ ($\text{Arg}(i) = \pi/2$). On a alors

$$\begin{aligned} r(\overrightarrow{M_1B}) = \overrightarrow{M_1A} &\Leftrightarrow r(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM_1}) = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM_1} \\ &\Leftrightarrow r(b - m_1) = a - m_1 \Leftrightarrow a - m_1 = i(b - m_1) \Leftrightarrow m_1(1 - i) = a - ib \\ &\Leftrightarrow m_1 = \frac{(a - ib)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{a + b + i(a - b)}{2}. \end{aligned}$$

On montre de la même manière que

$$m_2 = \frac{b + c + i(b - c)}{2}, \quad m_3 = \frac{c + d + i(c - d)}{2} \quad \text{et} \quad m_4 = \frac{d + a + i(d - a)}{2}.$$

On en déduit alors que $2(m_4 - m_2) = a - b - c + d + i(-a - b + c + d)$. Or

$$\begin{aligned} 2(m_3 - m_1) &= -a - b + c + d + i(-a + b + c - d) \\ &\Leftrightarrow 2i(m_3 - m_1) = a - b - c + d + i(-a - b + c + d) = 2(m_4 - m_2) \\ &\Leftrightarrow r(m_3 - m_1) = m_4 - m_2 \Leftrightarrow r(\overrightarrow{M_1M_3}) = \overrightarrow{M_2M_4}, \end{aligned}$$

ce qui prouve non seulement que $M_1M_3 = M_2M_4$, mais aussi que les droites (M_1M_3) et (M_2M_4) sont perpendiculaires. $\diamond$

Corollaire 1 : Soient $a \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$. L'application $z \mapsto az + b$ est l'écriture complexe de la similitude de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$, de rapport $|a|$ et d'angle $\text{Arg}(a)$.

démonstration : Soient M, M' deux points de $\mathcal{P}$ d'affixes respectives z et z' .

Montrons d'abord le sens direct. On suppose que $M' = f(M)$, donc $z' = f(z) = az + b$. Le point d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ est invariant par f et est donc point fixe de f . Par suite, $z' = az + b \Leftrightarrow z' = az + b + \omega - a\omega - b \Leftrightarrow z' - \omega = az - a\omega = a(z - \omega)$. Posons alors pour toute affixe ζ , $Z = \zeta - \omega$, qui correspond à un changement de repère par translation de vecteur d'affixe ω (d'après le théorème 4). La nouvelle origine est donc Ω d'affixe ω et f s'écrit dans le nouveau repère $f(Z) = aZ$. Le théorème précédent permet de conclure.

Réciproquement, on se donne une similitude s de centre Ω d'affixe ω , de rapport $k > 0$ et d'angle θ , et l'on veut montrer que si $M' = s(M)$, $z' = f(z)$. Posons pour toute affixe ζ , $Z = \zeta - \omega$, et donnons-nous $M' = s(M)$. On a alors

$$\frac{\Omega M'}{\Omega M} = k = \frac{|z' - \omega|}{|z - \omega|} = \frac{|Z'|}{|Z|} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta = \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \arg\left(\frac{Z'}{Z}\right).$$

En remarquant que $k = |ke^{i\theta}|$ et $\theta = \text{Arg}(ke^{i\theta})$, on déduit que

$$\frac{Z'}{Z} = ke^{i\theta} \Leftrightarrow z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega) \Leftrightarrow z' = ke^{i\theta}z + \omega(1 - ke^{i\theta}),$$

qui est bien de la forme $z' = az + b = f(z)$. ■

19.3 Applications de la transformation $z \mapsto \frac{z-a}{z-b}$

Nous avons déjà rencontré cette application dans la leçon n° 18, où nous en avons étudié les lignes de niveaux pour le module et pour l'argument. Cependant, puisqu'elle n'est pas "classique" (ce n'est pas une rotation, une symétrie ou une similitude), son étude ne sera pas développée ici.

19.3.1 Triangles semblables

Proposition 1 : Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables si et seulement si

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{c'-a'}{b'-a'}.$$

démonstration : On note a, b, c, a', b', c' les affixes respectives de A, B, C, A', B', C' dans le plan complexe. On a alors :

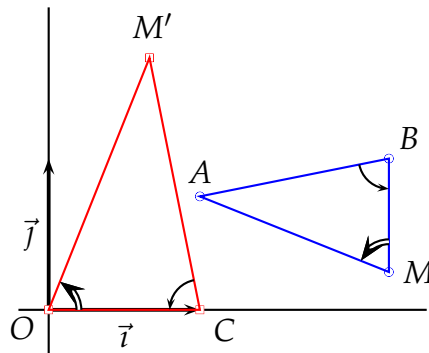
$$\begin{aligned} & \text{Deux triangles } ABC \text{ et } A'B'C' \text{ sont semblables} \\ \Leftrightarrow & \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'} \text{ et } (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \pmod{2\pi} \\ \Leftrightarrow & \left| \frac{c-a}{b-a} \right| = \left| \frac{c'-a'}{b'-a'} \right| \text{ et } \arg \left(\frac{c-a}{b-a} \right) = \arg \left(\frac{c'-a'}{b'-a'} \right) \pmod{2\pi} \\ \Leftrightarrow & \frac{c-a}{b-a} = \frac{c'-a'}{b'-a'}, \end{aligned}$$

car ces deux nombres complexes ont même module et même argument. ■

Si M, M', A, B, C sont cinq points d'affixes respectives $z, z', a, b, 1$ (seul M' est supposé être inconnu), alors :

$$z' = \frac{z-a}{z-b} \Leftrightarrow \frac{z'-0}{1-0} = \frac{z-a}{z-b} \Leftrightarrow \frac{z-a}{z-b} = \frac{0-z'}{0-1}.$$

D'après la proposition précédente, on sait alors que les triangles MBA et OCM' sont semblables, ce qui permet donc la construction du point M' :



19.3.2 Colinéarité et orthogonalité

Proposition 2 : Soient A, B et $M \neq B$ trois points de $\mathcal{P}$. Les droites (AM) et (BM) sont parallèles (resp. perpendiculaires) si et seulement si

$$\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R} \quad (\text{resp. } \in i\mathbb{R}).$$

démonstration : On suppose les trois points distincts, sinon le résultat est évident. On a alors

$$\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = 0 \pmod{\pi} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = 0 \pmod{\pi} \Leftrightarrow M \in (AB) \setminus \{A, B\},$$

d'où A, B et M sont alignés, ou les droites (AM) et (BM) sont parallèles. De plus,

$$\frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi},$$

et les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont bien orthogonaux. ■

19.3.3 Critère de cocyclicité

Proposition 3 : Quatre points distincts A, B, C, D d'afixes respectives a, b, c, d sont alignés ou cocycliques si et seulement si

$$\frac{a-c}{a-d} \div \frac{b-c}{b-d} \in \mathbb{R}.$$

démonstration : Notons tout d'abord que $\frac{a-c}{a-d} \div \frac{b-c}{b-d}$ est appelé bi-rapport du quadruplet (A, B, C, D) , et est noté $[A, B, C, D]$. On a donc

$$\begin{aligned} [A, B, C, D] \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{a-c}{a-d}\right) = \arg\left(\frac{b-c}{b-d}\right) \pmod{\pi} \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CB}) \pmod{\pi} \\ &\Leftrightarrow A, B, C, D \text{ cocycliques (d'après le théorème de l'arc capable) ou alignés.} \end{aligned}$$

■