

LEÇON N° 48 :

Limite d'une fonction réelle de la variable réelle.

Pré-requis :

- Limites d'une suite réelle ;
- Fonctions à valeurs réelles : opérations algébriques, restriction à une partie de son ensemble de définition, limite finie ou infinie en un point de $\mathbb{R}$, croissances comparées ;
- $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$;
- Inégalité triangulaire.

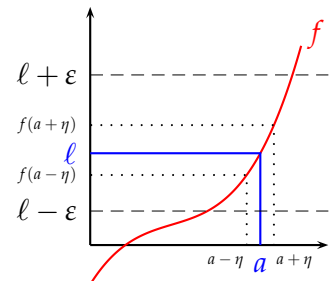
On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction et $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition. Si $D \subset \mathcal{D}_f$, on note $\overline{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap D \neq \emptyset\}$ le plus petit fermé de $\mathbb{R}$ contenant D (i.e. l'adhérence de D). On se donne dans toute cette leçon un sous-ensemble D de $\mathcal{D}_f$ et un réel $a \in \overline{D}$.

Remarque 1 : En particulier, si D est borné, les bornes supérieure et inférieure de D appartiennent à $\overline{D}$ (théorème de la borne supérieure - inférieure).

48.1 Limite finie en un point de $\mathbb{R}$

Définition 1 : On dit que f admet pour limite $\ell \in \mathbb{K}$ en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in D, \quad |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$



Théorème 1 : Si f admet une limite en a , alors elle est unique.

démonstration : Supposons que f admette deux limites $\ell_1 \neq \ell_2$ au point a . Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\begin{aligned} \exists \eta > 0 \mid \forall x \in D, \quad |x - a| < \eta &\Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \varepsilon, \\ \exists \eta' > 0 \mid \forall x \in D, \quad |x - a| < \eta' &\Rightarrow |f(x) - \ell_2| < \varepsilon, \end{aligned}$$

donc il existe $\eta'' = \inf(\eta, \eta') > 0$ tel que pour tout $x \in D$, on a

$$\begin{aligned} |x - a| < \eta'' \Rightarrow |\ell_2 - \ell_1| &= |\ell_2 - f(x) + f(x) - \ell_1| \\ &\leq |\ell_2 - f(x)| + |f(x) - \ell_1| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Prenons alors $\varepsilon = \frac{1}{3}|\ell_2 - \ell_1|$, de sorte que $\varepsilon > 0$. L'inégalité précédente devient alors $|\ell_2 - \ell_1| < \frac{2}{3}|\ell_2 - \ell_1|$, ce qui est absurde, donc $\ell_1 = \ell_2$. ■

Grâce à l'unicité de la limite, on peut introduire la notation suivante :

Notation : Sous réserve d'existence, l'unique limite $\ell \in \mathbb{K}$ de la fonction f au point a sera désormais notée $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Remarque 2 : Si $a \in \mathcal{D}_f$ et si f tend vers ℓ au point a , alors $\ell = f(a)$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Alors $a \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap \mathcal{D}_f \Rightarrow \forall \varepsilon' > 0, |f(a) - \ell| < \varepsilon \Rightarrow f(a) = \ell$.

Proposition 1 : Soient $B \subset D$ et $b \in \overline{B}$. Si f admet une limite en b , alors sa restriction à B , notée $f|_B$, admet la même limite en b .

démonstration : Triviale, en utilisant la définition et le fait que $x \in D$ pour tout $x \in B$. ■

Remarques 3 :

1. Avec $B = \mathcal{V} \cap D$, où $\mathcal{V}$ désigne un voisinage de b (donc contenant b), on a que f admet une limite finie en b est équivalent à $f|_{\mathcal{V} \cap D}$ admet une limite en b : cette proposition est donc un résultat local.
2. La réciproque est fautive. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'admet aucune limite en aucun point de $\mathbb{R}$. Cependant, sa restriction à $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) est la fonction constante égale à 1 (resp. 0).

Proposition 2 : Si f admet une limite finie en a , alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que f soit bornée sur $\mathcal{V} \cap D$.

démonstration : Soit $M \in \mathbb{R}^+$. Montrons que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathcal{V} \cap D$, où $\mathcal{V}$ désigne un voisinage de a , c'est-à-dire un intervalle ouvert contenant a . f admet par hypothèse une limite finie notée ℓ en a , donc par définition,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in D, \quad |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Prenons $\varepsilon = 1$. Il existe alors un tel voisinage $\mathcal{V}$ contenant a tel que $x \in \mathcal{V} \cap D \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon = 1$, d'où $f(x) < 1 + |\ell|$. Le nombre $M = 1 + |\ell| \in \mathbb{R}^+$ vérifie la propriété. ■

48.2 Limites à gauche et à droite en a

Définition 2 : Si l'on ajoute à $\forall x \in D$ l'hypothèse $x < a$ (resp. $x > a$) dans la définition de la limite de f en a (définition 1), alors on parle de *limite à gauche* (resp. *limite à droite*) de f en a , et on note (sous réserve d'existence)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \ell.$$

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ Alors f n'admet pas de limite en 0, mais $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$.

Théorème 2 : f admet une limite en a si et seulement si f admet la même limite à gauche et à droite en a . Pour que cela soit possible, on suppose de plus que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\setminus \{a\} \subset D$ et $a \notin D$.

démonstration : Le sens direct est immédiat. Montrons alors le sens indirect : on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \ell \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in D, \quad x < a \text{ et } |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon),$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \ell \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \eta' > 0 \mid \forall x \in D, \quad x > a \text{ et } |x - a| < \eta' \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

Par conséquent, $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta'' = \min(\eta, \eta') \mid \forall x \in D, x \neq a \text{ et } |x - a| < \eta'' \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$, et donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ (car $a \notin D$). ■

48.3 Opérations algébriques

Soient f, g deux fonctions telles que l'ensemble A défini par $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ soit non vide, et admettant respectivement ℓ_1 et ℓ_2 pour limites en un point $a \in \overline{A}$.

Théorème 3 :

- (i) Les fonctions $f + g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) et fg sont définies sur A et admettent pour limites respectives $\ell_1 + \ell_2$, $\lambda \ell_1$ et $\ell_1 \ell_2$ en a ;
- (ii) Si $\ell_2 \neq 0$, alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que f/g soit définie sur $\mathcal{V} \cap A$ et admette ℓ_1/ℓ_2 pour limite en a ;
- (iii) Si l'on suppose de plus que $f(x) \leq g(x)$, alors $\ell_1 \leq \ell_2$.

démonstration :

- (i) Rappelons que (proposition 2) il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in \mathcal{V} \cap \mathcal{D}_f$ ($\mathcal{V}$ voisinage de a), $|f(x)| < M$. Soit un tel M . Par définition,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in A, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{k},$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta' > 0 \mid \forall x \in A, |x - a| < \eta' \Rightarrow |g(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{k'},$$

où les nombres k et k' vont être définis pour chacun des cas suivants.

fg : En choisissant $k = 2|\ell_2|$ et $k' = 2M$, on a l'existence d'un réel $\eta'' = \min(\eta, \eta') > 0$ tel que pour tout $x \in A$, l'inégalité $|x - a| < \eta''$ implique

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - \ell_1\ell_2| &= |f(x)g(x) - f(x)\ell_2 + f(x)\ell_2 - \ell_1\ell_2| \\ &\leq |f(x)||g(x) - \ell_2| + |\ell_2||f(x) - \ell_1| \\ &< M \frac{\varepsilon}{2M} + |\ell_2| \frac{\varepsilon}{2|\ell_2|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Limite d'une fonction réelle de la variable réelle

$f + g$: En choisissant $k = k' = 2$, on prouve l'existence d'un réel $\eta'' = \min(\eta, \eta') > 0$ tel que pour tout $x \in A$, l'inégalité $|x - a| < \eta''$ implique

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - \ell_1 - \ell_2| &= |f(x) - \ell_1 + g(x) - \ell_2| \\ &\leq |f(x) - \ell_1| + |g(x) - \ell_2| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

λf : Enfin, en choisissant $k = |\lambda|$, on conclut en montrant que pour tout $x \in A$, l'inégalité $|x - a| < \eta$ implique

$$|\lambda f(x) - \lambda \ell_1| = |\lambda| |f(x) - \ell_1| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon.$$

(ii) $\ell_2 \neq 0$ implique qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in A, |x - a| < \eta \Rightarrow |g(x) - \ell_2| < |\ell_2|/2$ (choix particulier de $\varepsilon > 0$). Il vient que sur $A \cap]a - \eta, a + \eta[$, on a $|g(x)| > |\ell_2|/2$ et $1/g$ est définie sur ce voisinage de a . Sur ce voisinage, on a

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\ell_2} \right| = \frac{|g(x) - \ell_2|}{|g(x) \ell_2|} \leq 2 \frac{|g(x) - \ell_2|}{\ell_2^2}.$$

Or g admet une limite finie ℓ_2 en a , donc en appliquant la définition, on trouve que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta' > 0 \mid \forall x \in A, |x - a| < \eta' \Rightarrow |g(x) - \ell_2| < \varepsilon \frac{\ell_2^2}{2}.$$

On conclut alors que pour tout $x \in A$,

$$|x - a| < \eta'' = \min(\eta, \eta') \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\ell_2} \right| < \varepsilon.$$

(iii) D'après ce qui précède, on peut écrire que

$$\lim_{x \rightarrow a} (g(x) - f(x)) = \ell_2 - \ell_1.$$

Supposons alors que $\ell_2 - \ell_1 < 0$. Il existe alors un intervalle I ouvert contenant a tel que pour tout $x \in I \cap A$, on a $g(x) - f(x) < 0$. On aboutit ainsi à une contradiction, prouvant que $\ell_2 - \ell_1 \geq 0$. ■

Remarque 4 : La réciproque est fautive. En effet, les fonctions $f(x) = 0$ et $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$ vérifient toutes les deux $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ sans que $f \leq g$ au voisinage de 0!

Théorème 4 (d'encadrement) : Soit h une fonction telle que $A \cap \mathcal{D}_h \neq \emptyset$ et admettant ℓ_3 pour limite en $a \in \overline{A \cap \mathcal{D}_h}$. Si pour tout $x \in A \cap \mathcal{D}_h$, on a $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, alors

$$(\ell_1 = \ell_2 = \ell) \Rightarrow \ell_3 = \ell.$$

démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe deux voisinages ouverts $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ contenant a tels que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{V}_1 \cap (A \cap \mathcal{D}_h), \quad \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon \\ \text{et } \forall x \in \mathcal{V}_2 \cap (A \cap \mathcal{D}_h), \quad \ell - \varepsilon \leq g(x) \leq \ell + \varepsilon. \end{aligned}$$

Sur $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \cap (A \cap \mathcal{D}_h)$, on a donc $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq h(x) \leq g(x) \leq \ell + \varepsilon$, ce qui se traduit par $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$. ■

Exemple : Par développement limité, on a au voisinage de 0 :

$$\underbrace{1 - \frac{x^3}{3!}}_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} < \frac{\sin x}{x} < \underbrace{1}_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}}, \quad \text{d'où} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Théorème 5 (de composition) : Soient D_1 et D_2 deux parties de $\mathbb{R}$, $f : D_1 \rightarrow D_2$, $g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D_1}$.

- (i) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, alors $b \in \overline{D_2}$,
(ii) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \ell$.

démonstration :

- (i) Soit $\mathcal{V}_2$ un voisinage de b . Comme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_1$ de a tel que $f(\mathcal{V}_1 \cap D_1) \subset \mathcal{V}_2$. Or $\mathcal{V}_1 \cap D_1 \neq \emptyset$ (car il contient a), donc $f(\mathcal{V}_1 \cap D_1) \neq \emptyset$ et puisque $f(\mathcal{V}_1 \cap D_1) \subset \mathcal{V}_2 \cap D_2$, $\mathcal{V}_2 \cap D_2 \neq \emptyset$. D'où $b \in \overline{D_2}$.
(ii) Soit $\mathcal{W}$ un voisinage de ℓ . Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de b tel que $g(\mathcal{V} \cap D_2) \subset \mathcal{W}$ puis un voisinage $\mathcal{U}$ de a tel que $f(\mathcal{U} \cap D_1) \subset \mathcal{V}$. D'où $f(\mathcal{U} \cap D_1) \subset \mathcal{V} \cap D_2$, d'où finalement $g(f(\mathcal{U} \cap D_1)) \subset g(\mathcal{V} \cap D_2) \subset \mathcal{W}$, et il vient que $(g \circ f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$. ■

Exercice : Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$.

Solution : Posons $f(x) = 3x$ et $g(x) = \frac{3}{2} \frac{\sin x}{x}$, de sorte que

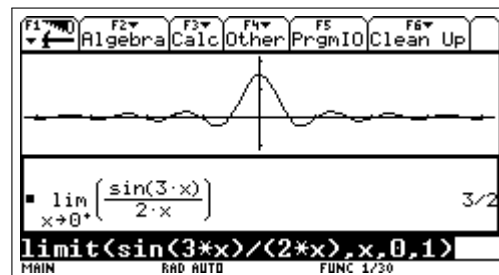
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{3}{2} \quad (\text{cf. exemple précédent}).$$

Puisque $(g \circ f)(x) = \frac{3}{2} \frac{\sin(3x)}{3x} = \frac{\sin(3x)}{2x}$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x} = \frac{3}{2}.$$

Nous avons utilisé le théorème de composition donné ci-dessus. ◇

Cet exemple est bien choisi car il est difficile de bien voir sur la calculatrice que cette fonction n'est pas définie en 0 :



Théorème 6 (caractérisation séquentielle) : Une fonction f tend vers ℓ au point a si et seulement si pour toute suite réelle (u_n) de points de D qui tend vers a , $f(u_n)$ tend vers ℓ .

démonstration :

" $\Rightarrow$ ": Pour tout voisinage ouvert $\mathcal{V}_2$ de ℓ il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}_1$ de a tel que $f(\mathcal{V}_1 \cap D) \subset \mathcal{V}_2$. Or il existe un entier naturel N tel que $u_n \in \mathcal{V}_1 \cap D$ pour tout $n \geq N$. Donc $f(u_n) \in \mathcal{V}_2$, c'est-à-dire $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$.

" $\Leftarrow$ ": Montrons ce résultat par contraposée : supposons que f n'admette pas ℓ pour limite. Alors

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \left] a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right[\cap D \text{ et } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon.$$

On note alors x_n l'élément x associé à chaque entier n , de sorte que l'on ait construit une suite tendant vers a , sans pour autant que $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$. ■

Exercice : Montrer que $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0.

Solution : Pour cela, considérons la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Alors $\sin \frac{1}{u_n} = (-1)^n$ n'admet pas de limite en 0, donc $f(x)$ non plus par le théorème précédent. $\diamond$

48.4 Continuité en un point

On considère un réel $a \in D$.

Définition 3 :

- On dit que f est continue en a si f admet une limite finie en ce point (nécessairement égale à $f(a)$). Symboliquement, $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in D, \mid x - a \mid < \eta \Rightarrow \mid f(x) - f(a) \mid < \varepsilon$.
- On dit que f est continue sur $D' \subset D$ si f est continue en chaque point de D' .
- Si f n'est pas continue en a , on dit qu'elle est *discontinue* en a .

Remarque 4 : Les théorèmes 3, 5 et 6 peuvent donc être réécrits en utilisant la continuité (par exemple, si f et g sont deux fonctions continues en un point A de l'ensemble $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ supposé non vide, alors $f + g$, kf ($k \in \mathbb{R}$) et fg sont continues en a).

Dans toute la suite, f désigne une fonction à valeurs réelles continue, dont l'ensemble de définition est $\mathcal{D}_f$. On considère aussi l'intervalle $]a, +\infty[$, où a est un réel tel que cet intervalle soit inclus dans $\mathcal{D}_f$.

48.5 Limite à l'infini

48.5.1 Limite finie et infinie

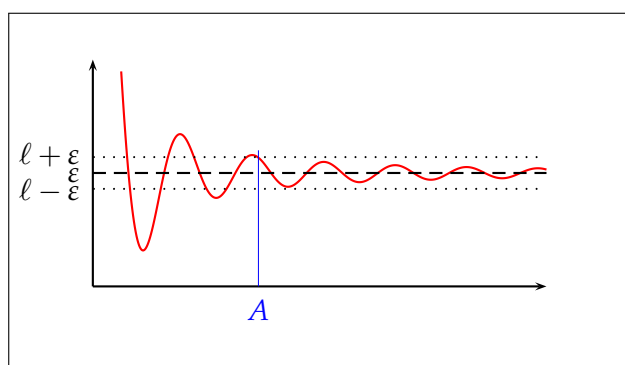
Définition 4 : On dit que f admet un réel ℓ comme limite en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad x > A \Rightarrow \mid f(x) - \ell \mid \leq \varepsilon.$$

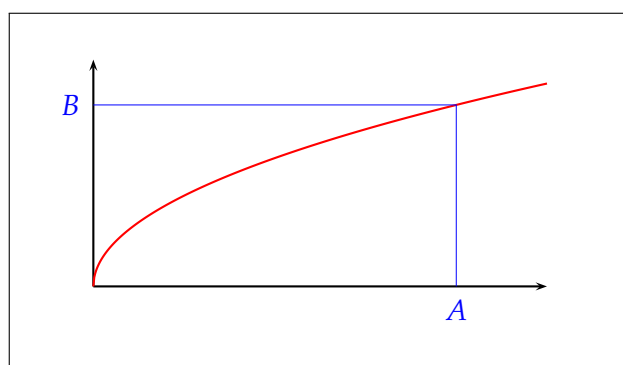
On dit que f admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour limite en $+\infty$ si

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad x \geq A \Rightarrow f(x) \geq B \quad (\text{resp. } f(x) \leq B).$$

Interprétations graphiques



Limite finie



Limite infinie

48.5.2 Unicité de la limite

Proposition 3 : Soit g la fonction définie sur $[0, \frac{1}{a}]$ avec $a > 0$ (resp. $[-\frac{1}{a}, 0]$ avec $a < 0$) par

$$g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Alors f admet pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si et seulement si g admet ℓ pour limite en 0.

démonstration : On ne montre le résultat qu'en $+\infty$, celui en $-\infty$ se montrant de manière analogue. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\exists A \in \mathbb{R}^+ \mid \forall x \in \mathcal{D}_f, x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$. En posant $X = \frac{1}{x}$ et $a = \frac{1}{A}$, ceci équivaut à

$$\exists a \in \mathbb{R}^+ \mid \forall X \in \mathcal{D}_g, 0 < X < a \Rightarrow \left| f\left(\frac{1}{X}\right) - \ell \right| < \varepsilon,$$

ce qui équivaut encore à $\exists a \in \mathbb{R}^+ \mid \forall X \in \mathcal{D}_g, 0 < X < a \Rightarrow |g(X) - \ell| < \varepsilon$, donc $\lim_{X \rightarrow 0} g(X) = \ell$.

Le résultat se montre de la même manière si $\ell = \pm\infty$. ■

Théorème 7 : Si f admet une limite en $\pm\infty$, alors elle est unique.

démonstration : Si $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ sont deux limites de f en $+\infty$, alors le lemme précédent nous assure que

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \ell \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \ell' \quad \text{avec } g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

L'unicité est déduite de celle de la limite en un point de $\mathbb{R}$. ■

Grâce à l'unicité de la limite, on peut introduire la notation suivante :

Notation : $\ell = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim f$, où $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Cette fin de leçon traite entièrement des limites à l'infini, d'où la liberté prise pour la seconde notation. C'est celle qui sera le plus utilisée dans la suite, et sauf mention contraire, elle symbolisera tout le temps une limite lorsque x tend vers l'infini.

48.5.3 Propriétés

Le lemme précédent nous assure que les propriétés relatives aux opérations algébriques, à la composition et à la comparaison de fonctions sont analogues à celles qui concernent les limites en un point réel. Nous avons donc (les limites sont en $+\infty$ ou en $-\infty$) :

Soient f, g deux fonction définies sur un ensemble contenant l'intervalle $D^+ =]a, +\infty[$ (resp. $D^- =]-\infty, a[$). La fonction sgn donne simplement le signe de son argument (par exemple, $\ell > 0 \Rightarrow \text{sgn}(\ell) = +$).

Limite d'une fonction réelle de la variable réelle

$\lim g \backslash \lim f$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell \neq 0$	$\ell \ell'$	$\text{sgn}(\ell')\infty$	$-\text{sgn}(\ell')\infty$	0
$+\infty$	$\text{sgn}(\ell)\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI
$-\infty$	$-\text{sgn}(\ell)\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI
0	0	FI	FI	0

 Limites de la fonction fg

$\lim g \backslash \lim f$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell \neq 0$	ℓ/ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	0
$+\infty$	0	FI	FI	FI
$-\infty$	0	FI	FI	FI
0	$\text{sgn}(\ell)\infty$	FI	FI	FI

 Limites de la fonction f/g

$\lim g \backslash \lim f$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell \neq 0$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	ℓ'
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$	$-\infty$
0	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	0

 Limites de la fonction $f + g$

Exemples :

1. La fonction

$$f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{1}{x^2}$$

peut être vue comme le produit de la fonction $g(x) = \frac{1}{x}$ par elle-même. Puisque $\lim g = 0$, $\lim f = 0$ d'après le tableau des limites d'une fonction « produit » ;

2. Soient $f(x) = 4x^3 + 3x$ et $g(x) = 2x + 1$. On a $\lim f = \lim g = +\infty$, mais le tableau des limites d'une fonction « quotient » donne une forme indéterminée pour f/g . Cependant,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4x^3 + 3x}{2x + 1} = \frac{4x^2 + 3}{2 + \frac{1}{x}} \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow +\infty \\ \rightarrow 2 \end{array} \right. ,$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty ;$$

3. De la même manière, on détermine que

$$g :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{x+1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad \lim g = 1.$$

Proposition 4 : Soient u, v, f trois fonctions définies sur des domaines contenant $]A, +\infty[$ (resp. $] -\infty, A[$) pour tout réel A . S'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $x > M$ (resp. $x < M$) et $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$, alors :

- * $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} v(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$;
- * $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$;
- * $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} v(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$.

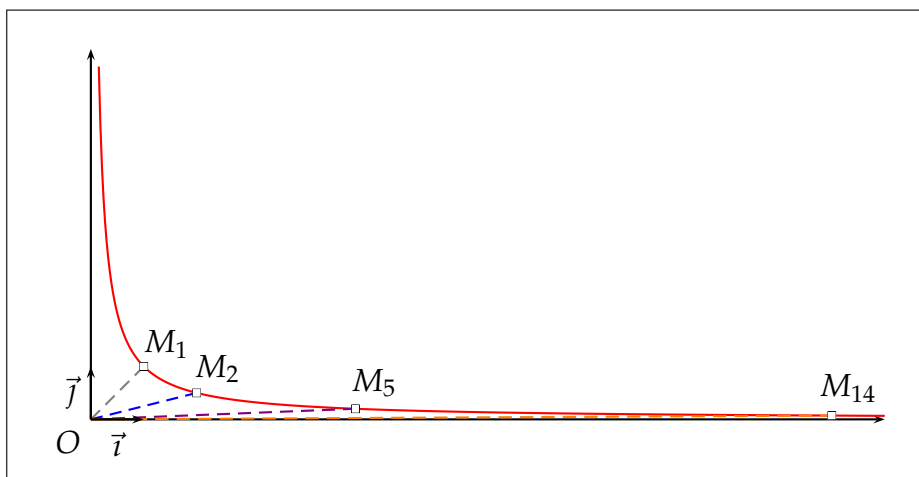
démonstration : On se rapporte, via le lemme, aux résultats sur les limites en un point de $\mathbb{R}$. ■

48.6 Branches infinies (facultatif)

Soient $\mathcal{P}$ un plan euclidien, muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (plus facile pour les calculs de distances), I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I et $a \in \bar{I} \setminus I$, $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et M_x le point de $\mathcal{C}_f$ ayant pour coordonnées $(x, f(x))$.

Définition 5 : On dit que $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie en a si $\lim_{x \rightarrow a} OM_x = +\infty$.

Interprétation graphique, avec la fonction inverse



Remarques 5 :

– Cette définition ne dépend pas du point O . En effet, si O' est un autre point de $\mathcal{P}$, alors par inégalité triangulaire, $OO' + O'M_x \geq OM_x$, c'est-à-dire $O'M_x \geq OM_x - OO'$. On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow a} OM_x = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} O'M_x = +\infty.$$

– Si $a \in \{-\infty, +\infty\}$, alors $\lim_{x \rightarrow a} OM_x = +\infty$ (c'est-à-dire que $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie en $+\infty$ ou $-\infty$).

En effet, $\overrightarrow{OM_x} = x\vec{i} + f(x)\vec{j} \Rightarrow OM_x = \sqrt{x^2 + f(x)^2} \geq |x|$, et $x \rightarrow \pm\infty$ achève cette démonstration.

Proposition 5 : Si $a \in \mathbb{R}$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie en $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$.

démonstration : On a $\lim_{x \rightarrow a} OM_x^2 = a^2 + \lim_{x \rightarrow a} f(x)^2$, donc $\lim_{x \rightarrow a} OM_x = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x)^2 = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$. ■

Définition 6 : Si $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie en a , on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ en a .

Exemples (les captures d'écran à la calculatrice se trouvent juste en-dessous) :

1. Soit f la fonction définie sur $I_1 =]0, +\infty[$ par $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$. Grâce aux croissances comparées, on sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, donc que $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ en 0 (à droite).

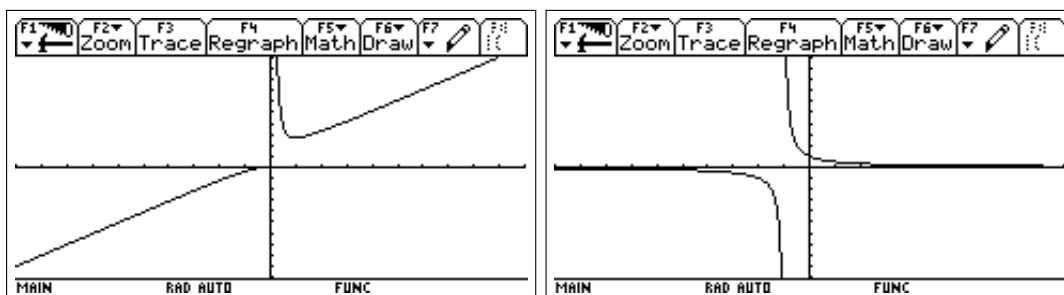
Limite d'une fonction réelle de la variable réelle

Par contre, si cette même fonction était définie sur l'intervalle $I_2 =]-\infty, 0[$, alors on aurait que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, et il n'y a donc pas d'asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ en 0 à gauche !

2. Soit $f(x) = \frac{1}{x+1}$ une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On détermine facilement que

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty,$$

donc $x = -1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ en -1 .



On se place maintenant dans un voisinage de $+\infty$ et tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ (dans un cas plus simple, si cette limite est finie et vaut ℓ , on dira que la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$).

Définition 7 : La droite d'équation $y = ax + b$ ($a \neq 0$) est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Proposition 6 : Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \neq 0$) et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = b$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Exercice : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{4x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x^2 + 1}.$$

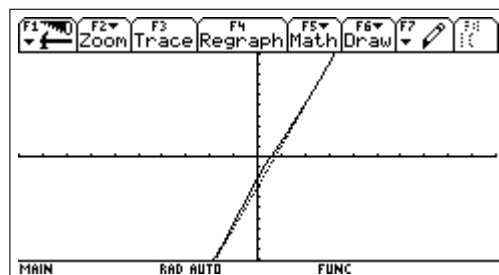
Montrer que la droite d'équation $y = 4x - 3$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Solution : On a :

$$\begin{aligned} f(x) - (4x - 3) &= \frac{4x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x^2 + 1} - \frac{(4x - 3)(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \\ &= \frac{4x^3 - 3x^2 + 4x - 2 - (4x^3 + 4x - 3x^2 - 3)}{x^2 + 1} \\ &= \frac{1}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Cette quantité tend clairement vers 0 lorsque x tend vers l'infini, donc la droite d'équation $y = 4x - 3$ est bien asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. $\diamond$

Cet exemple est bien choisi car il est difficile de bien le voir sur la calculatrice :



48.7 Branches paraboliques

Définition 8 : Notons "B.P." pour "branche parabolique".

1. Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, alors on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une B.P. de direction $(0y)$ en $+\infty$;
2. Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une B.P. de direction $(0x)$ en $+\infty$;
3. Si $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$, alors on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une B.P. de direction la droite $y = ax$ en $+\infty$;

Exemples (les calculs, non difficiles, sont laissés au lecteur) :

1. $x \mapsto e^x, x \mapsto x^2, \dots$
2. $x \mapsto \ln x, x \mapsto \sqrt{x}, \dots$
3. $x \mapsto 3x + \ln x, x \mapsto \frac{2x + 5 + x\sqrt{x}}{3x + 2}, \dots$

Exercice : Montrer que $\mathcal{C} : y = \frac{x}{1 + e^{1/x}}$ admet une asymptote en $-\infty$ et $+\infty$. Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à cette droite.

Solution : On utilise la proposition 6. En effet, $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{1 + e^{1/x}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$. On a donc trouvé le nombre a non nul de cette proposition. Poursuivons :

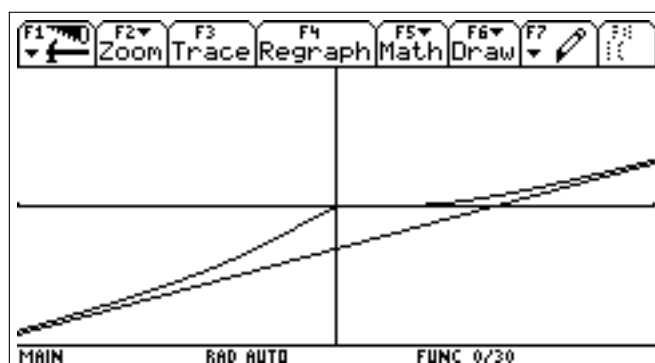
$$f(x) - \frac{x}{2} = \frac{x}{1 + e^{1/x}} - \frac{x}{2} = \frac{x - \frac{x}{2} - \frac{x}{2}e^{1/x}}{1 + e^{1/x}} = \frac{x(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{1/x})}{1 + e^{1/x}} = \frac{x(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})))}{1 + e^{1/x}}.$$

On a pu utiliser le développement limité de l'exponentielle au voisinage de 0 car $1/x$ tend justement vers 0 lorsque $x \rightarrow \infty$. Ceci nous donne alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - \frac{x}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x}))}{1 + e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{1 + e^{1/x}} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}.$$

Nous avons ainsi trouvé le nombre b de la proposition 4, qui nous permet donc d'affirmer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$. Il se trouve que les calculs donnent le même résultats pour $-\infty$, et on peut donc dire que $\mathcal{D}$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $\pm\infty$.

Voici la représentation graphique à la calculatrice : la fenêtre est limitée aux abscisses et ordonnées comprises entre -1 et 1 , car en-dehors, on n'aurait pas vu grand chose...



Je laisse au lecteur le soin de faire le calcul permettant de conclure que $\mathcal{C}$ est toujours au-dessus de $\mathcal{D}$.

© 2012 par Martial LENZEN.

Aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L. 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite sans l'autorisation expresse de l'auteur.