# CAPES externe 2010 de Mathématiques
## Première composition : ÉNONCÉ

mardi 9 mars 2010

*9h – 14h*

Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une préparation à la philosophie – *Isocrate*

## Introduction

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :

$$a_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

On étudie la série de terme général $a_n$. On montre qu'elle est convergente et on donne différentes représentations de sa somme, notée $\gamma$, et appelée **Constante d'Euler**. Pour cela on commence par étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} a_p = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} + \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n+1).$$

On s'intéresse également à la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $H_0 = 0$ et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$H_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}.$$

# Partie I : Première approche de la constante d'Euler

1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En encadrant l'intégrale $\displaystyle\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, montrer que

$$0 \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

2) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, puis qu'elle est convergente et que sa limite $\gamma$ appartient à l'intervalle $[0,1]$.

3) Vérifier que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$a_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{t}{t+p}\,\mathrm{d}t,$$

puis montrer que pour tout entier $p \geqslant 2$ on a :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right).$$

4) En déduire un encadrement de $S_m - S_n$ pour $m$ et $n$ des entiers vérifiant $m > n \geqslant 1$. Puis montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\frac{1}{2n+2} \leqslant \gamma - S_n \leqslant \frac{1}{2n}.$$

5) Conclure qu'on a le développement asymptotique suivant pour la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ :

$$H_n \underset{n\to\infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $T_n = S_n + \dfrac{1}{2n+2}$. Montrer que

$$0 \leqslant \gamma - T_n \leqslant \frac{1}{2n(n+1)}.$$

7) Déterminer un entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $T_n$ est une valeur approchée de $\gamma$ à $10^{-2}$ près. Donner alors un encadrement de $\gamma$ à $10^{-2}$ près.

# Partie II : Deux représentations intégrales de la constante d'Euler

*Soit $I$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, borné ou non et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On dira que $f$ est* ***intégrable*** *sur $I$ si l'intégrale impropre de $f$ sur $I$ est absolument convergente.*

On admettra le résultat suivant : *Soit $I$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, borné ou non et soit $\sum u_n$ une série de fonctions réelles positives, définies, continues par morceaux et intégrables sur l'intervalle $I$. Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $I$ vers une fonction continue par morceaux et si la série numérique $\sum \int_I u_n$ converge, alors, la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur $I$ et on a :*

$$\int_I \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n.$$

1) Dans cette question, on se propose de démontrer la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \left( \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t.$$

   a) Montrer que les deux intégrales suivantes sont convergentes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}-t}{1-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

   b) Déterminer la limite de $\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \dfrac{1}{t}$ quand $t \to 0^+$.

   c) Conclure.

2) Dans cette question, on se propose de démontrer que si $a$ et $b$ sont deux réels strictement positifs, alors la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln \frac{b}{a}.$$

   Soient $x$ et $y$ deux réels strictement positifs.

   a) Démontrer que :

$$\int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{ay}^{by} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

   b) Montrer que pour $a \leqslant b$ on a pour tout réel $z > 0$ :

$$\mathrm{e}^{-bz} \ln \frac{b}{a} \leqslant \int_{az}^{bz} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-az} \ln \frac{b}{a}.$$

   c) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln \frac{b}{a}.$$

3) **Une première représentation intégrale de la constante d'Euler.**

   a) Démontrer que pour tout réel $t > 0$ on a :

$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt} \quad \text{et} \quad \frac{1}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{\mathrm{e}^{-nt} - \mathrm{e}^{-(n+1)t}}{t} \right).$$

b) En déduire que pour tout réel $t > 0$ on a :

$$e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-(n+1)t}-\frac{e^{-(n+1)t}-e^{-(n+2)t}}{t}\right).$$

c) Démontrer que pour tout réel $t > 0$, on a :

$$1-\frac{1-e^{-t}}{t}\geqslant 0.$$

d) Retrouver alors la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt$ et démontrer l'égalité :

$$\gamma=\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt.$$

4) **Une deuxième représentation intégrale de la constante d'Euler.**

Soit $y$ un réel strictement positif.

a) Calculer $\displaystyle\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt$, puis déduire que

$$\lim_{y\to 0^+}\left(\ln y+\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt\right)=0.$$

b) Démontrer que :

$$\gamma+\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt=\int_0^{y} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt+\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt.$$

c) En déduire que :

$$\lim_{y\to 0^+}\left(\gamma+\ln y+\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right)=0.$$

d) Démontrer que la fonction $t\mapsto e^{-t}\ln t$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt=\lim_{y\to 0^+}\left(e^{-y}\ln y+\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right).$$

e) Conclure alors que :

$$\gamma=-\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt.$$

# Partie III : Pour une valeur approchée de la constante d'Euler

1) a) Démontrer l'égalité suivante :

$$\int_0^1\left(\frac{1}{t}-\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\right)dt=\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt.$$

(**Indication** : *on pourra calculer chacune des deux intégrales*).

b) En utilisant l'égalité obtenue en II.3)d), démontrer que :

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

2) Soit $F$ la fonction définie par $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_k}{k!}\,x^k$.

(On rappelle que $H_0 = 0$ et pour $k \geqslant 1$, $H_k = \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p}$.)

a) Montrer que $F$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Démontrer que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$F'(x) - F(x) = \frac{1}{x}(\mathrm{e}^x - 1).$$

c) Montrer alors que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$F(x) = \mathrm{e}^x \int_0^x \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

3) Déduire des questions précédentes que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$\gamma + \ln x = \mathrm{e}^{-x} F(x) - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

4) Soit un entier $n \geqslant 1$ et soit un entier $a \geqslant 2$. Montrer que :

$$\sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!}\,n^k \leqslant \frac{n^{an+1}}{(an)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^k \leqslant \frac{a}{a-1}\,\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}}\left(\frac{\mathrm{e}}{a}\right)^{an}.$$

(**Indication** : *on pourra admettre et utiliser l'inégalité :* $n! \geqslant \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.)

5) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\left|\gamma + \ln n - \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{an} \frac{H_k}{k!}\,n^k\right| \leqslant \frac{a}{a-1}\,\frac{\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}}\left(\frac{\mathrm{e}}{a}\right)^{an} + \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}.$$

6) Décrire une méthode permettant le calcul d'une valeur approchée de $\gamma$ à $10^{-10}$ près. (On ne demande pas le calcul d'une telle valeur approchée.)

# Partie IV : La constante d'Euler somme de la série de Vacca (1910)

Pour tout entier $p \geqslant 0$, on pose :

$$v_p = p\left(\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{(-1)^k}{k}\right).$$

1) a) En séparant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs dans l'expression de $v_p$, montrer que pour tout entier $p \geqslant 1$, on a :

$$v_p = p(\sigma_{p-1} - \sigma_p) \quad \text{où} \quad \sigma_p = \sum_{h=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{h}.$$

b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\sum_{p=1}^{n} v_p = \sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p - n\sigma_n.$$

c) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p = H_{2^n} - \frac{1}{2^n}.$$

d) En utilisant le développement asymptotique de $H_n$, obtenu en I.5), conclure que la série de terme général $v_p$ est convergente et qu'on a :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} v_p = \gamma.$$

2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = (-1)^n \frac{\lfloor \log_2 n \rfloor}{n},$$

où $\log_2$ désigne la fonction logarithme en base 2 et $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel $x$.

a) Expliquer pourquoi le critère spécial des séries alternées ne permet pas de montrer la convergence de la série de terme général $u_n$.

b) Soit $n$ un entier naturel et soit $m$ un entier tel que : $2^{n+1} \leqslant m < 2^{n+2}$. Montrer que

$$\left| \sum_{k=2^{n+1}}^{m} \frac{(-1)^k}{k} \right| \leqslant \frac{1}{2^n},$$

puis en déduire que :

$$\left| \sum_{k=2^{n+1}}^{m} u_k \right| \leqslant \frac{n+1}{2^n}.$$

c) Soit $n$ un entier naturel et soit $m$ un entier tel que : $2^{n+1} \leqslant m < 2^{n+2}$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{m} u_k = \sum_{p=0}^{n} v_p + \mathcal{O}\left(\frac{n}{2^n}\right)$$

et en déduire que la série de terme général $u_n$ converge et que l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \gamma.$$

3) On pose pour tout entier naturel $n$ :

$$r_n = \sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

a) Montrer que la série de terme général $r_n$ est absolument convergente.

b) Exprimer $v_k$ en fonction de $k$, $r_k$ et $r_{k+1}$. Montrer ensuite que

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} r_k - n\, r_{n+1}.$$

Conclure que :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{2^n + j} \right).$$

# Partie V : La formule de Gosper (1972)

Dans cette partie on désigne par $\mathscr{F}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$. Si $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un élément de $\mathscr{F}$, on notera aussi $x[k]$ le terme $x_k$ de la suite $x$. On considère l'endomorphisme $\Delta$ de $\mathscr{F}$ défini par :

$$\forall\, x \in \mathscr{F}, \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \Delta(x)[k] = x[k] - x[k+1].$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\Delta^n$ l'endomorphisme de $\mathscr{F}$ obtenu en composant $\Delta$ avec lui-même $n$ fois et on pose $\Delta^0 = \mathrm{Id}_{\mathscr{F}}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout entier $p \in [0, n]$, $\binom{n}{p}$ désigne le coefficient binômial :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathscr{F}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\Delta^n(x)[k] = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} x_{p+k}.$$

(**Indication** : *écrire* $\Delta = \mathrm{Id}_{\mathscr{F}} - T$ *où* $T$ *est l'endomorphisme de* $\mathscr{F}$ *défini, pour tout* $x \in \mathscr{F}$ *et pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *par :* $T(x)[k] = x[k+1]$.)

2) Soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente et de limite $\ell$. On se propose de montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} u_p = \ell.$$

a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $\left(\dfrac{\binom{n}{p}}{2^n}\right)_{n\geqslant p}$ converge vers 0.

b) On suppose dans cette question $\ell = 0$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} u_p = 0.$$

(**Indication** : *On pourra utiliser l'égalité suivante :*

$$\frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} u_p = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{k} \binom{n}{p} u_p + \frac{1}{2^n} \sum_{p=k+1}^{n} \binom{n}{p} u_p$$

*et, étant donné un réel* $\varepsilon > 0$, *choisir un entier k suffisamment grand pour que l'on ait l'inégalité* $\left| \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{p=k+1}^{n} \binom{n}{p} u_p \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.)

c) Conclure pour la cas général où $\ell$ est quelconque.

3) Dans cette question, on se propose de démontrer la propriété suivante : Soit $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}$. Si la série $\sum (-1)^k x_k$ converge, alors, la série de terme général $\dfrac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}$ converge et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}.$$

On pose, pour tout $N \in \mathbb{N}$ :

$$U_N = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k x_k \quad \text{et} \quad V_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}.$$

a) Démontrer que

$$V_N = \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{q=0}^{n} \binom{N+1}{q+1} U_q.$$

(**Indication** : *on pourra observer que pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $(-1)k\, x_k = U_k - U_{k-1}$, *avec, par convention,* $U_{-1} = 0$.)

b) En déduire que la série de terme général $\dfrac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, x_k.$$

4) On considère dans cette question un entier $n \geqslant 1$ ainsi que la suite $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_j = \frac{1}{2^n + j}.$$

a) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 0$ on a :

$$\Delta^m(x)[0] = \frac{1}{2^n} \frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}.$$

(**Indication** : *on pourra admettre et utiliser le résultat suivant : Pour* $m, n \in \mathbb{N}$ *on a :*

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m \,\mathrm{d}x = \frac{m!\, n!}{(m+n+1)!}.)$$

b) En déduire que :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+n+1}} \frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}.$$

c) Conclure que la constante d'Euler peut s'écrire :

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\binom{2^{p-k}+k}{k}}.$$